



JENN

Training and Consultancy

The path to enlightened education

VAK: WISKUNDE

GRAAD 12

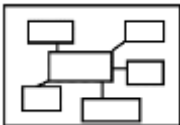
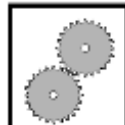
2026 WINTER KLASSE

ONDERWYSER EN LEERDER INHOUDSHANDLEIDING

Onderwerp(e)

FUNKSIES EN GRAFIEKE

IKOON BESKRYWING

 BREINKAART	 EKSAMEN RIGLYN	 INHOUD	 AKTIWITEITE
 BIBLIOGRAFIE	 TERMINOLOGIE	 UITGEWERKTE VOORBEELDE	 STAPPE



INHOUD

BLADSY

FUNKSIES EN GRAFIEKE

A) INHOUD EN VOORBEELDE

4 – 38

B) AKTIWITEITE

39 – 45

BYLAAG A: INLIGTINGSBLAD

46

BYLAAG B: EKSAMENRIGLYNE

47

BIBLIOGRAFIE

48

FUNKSIES EN GRAFIEKE

Oorsig:

1. Hersien werk oor die invloed van die parameters a en q en ondersoek die invloed van p op die grafieke van die funksies gedefinieer deur: 1.1. $y = f(x) = a(x + p)^2 + q$ 1.2. $y = f(x) = \frac{a}{x + p} + q$ 1.3. $y = f(x) = ab^{x+p} + q$ waar $b > 0, b \neq 1$	2. Ondersoek numeries die gemiddelde gradiënt tussen twee punte op 'n kurwe en ontwikkel 'n intuitiewe begrip van die konsep van die helling van 'n kromme by 'n punt.	1. Definisie van 'n funksie. 2. Algemene konsep van die inverse van 'n funksie en hoe dit nodig mag wees om die gebied van die funksie te beperk (om 'n een-tot-een funksie te kry) om te verseker dat die inverse 'n funksie is. 3. Bepaal en skets die grafieke van die inverses van die funksies gedefinieer deur $y = ax + q; y = ax^2$ $y = b^x; (b > 0, b \neq 1)$ Fokus op die volgende eienskappe: Die gebied en die terrein, afsnitte met die asse, draaipunte, minimum en maksimum, waarders, asimptote (horisontale en vertikale), vorm en simmetrie, gemiddelde gradiënt (gemiddelde tempo van verandering), intervale waarop die funksie toeneem/afneem.
--	---	---

(BRON: KURRIKULUM – EN - ASSESSERINGBELEIDSVERKLARING(KABV) VOO fase GRADE (10 – 12) WISKUNDE)

Belangrike terminologie

Definisieversameling (Gebied) : die stel moontlike x -waardes	} Vir alle funksies
Waardeversameling (Terrein) : die stel moontlike y -waardes	
Simmetrie-as : 'n denkbeeldige lyn wat die grafiek in twee spieëlbeelde van mekaar deel.	} Sien die hiperbool en parabool
Maksimum: die hoogste moontlike y -waarde van 'n funksie	
Minimum: die laagste moontlike y -waarde van 'n funksie	} Sien die parabool
Asimptoot: 'n denkbeeldige lyn wat 'n grafiek nader maar nooit raak nie.	
Draaipunt: Die punt waar 'n grafiek sy maksimum of minimum bereik en van rigting verander	} Sien die hiperbool en eksponensiale funksie
	} Sien die parabool

Die konsepte van toename en afname in funksies: alle funksies : all functions

- Die funksie NEEM TOE wanneer die waarde van y toeneem soos die waarde van x toeneem van links na regs
 - DIE GRAFIEK GAAN OP**
- Die funksie NEEM AF wanneer die waarde van y afneem soos die waarde van x toeneem van links na regs
 - DIE GRAFIEK GAAN AF**

AFDELING 1: LINEÛRE FUNKSIE (REGUIT LYN)

Die grafiek van $y = mx + c$

Standaardvorm van
lineêre funksie

WAAR

$m = \text{gradiënt}$

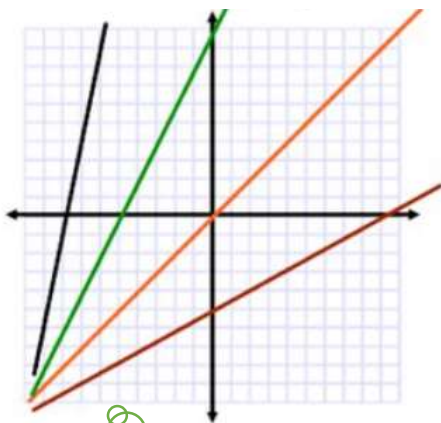
Wanneer $m > 0$ (**gradiënt is positief**) en
 $m < 0$ (**gradiënt is negatief**)

Definisieversameling (Gebied) : $x \in R$

Waardeversameling (Terrein) : $y \in R$

Vorm

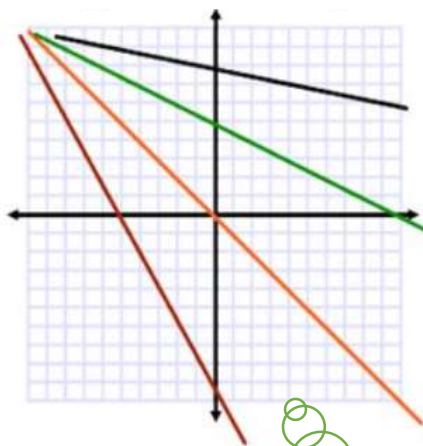
Positiewe Helling



Wanneer $m > 0$

1. Die gradiënt is positief
2. Die funksie is toenemend

Negatiewe Helling



Wanneer $m < 0$

3. Die gradiënt is negatief
4. Die funksie is dalend /
neem af

Voorbeeld 1

Skets die grafiek van $y = 2x - 1$ en bepaal die Definisie- en Waardeversamelings van die funksie, en meld of die funksie toenemend of dalend is.

Oplossing

x – afsnit: stel $y = 0$

$$0 = 2x - 1$$

$$-2x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}; 0\right)$$

y – afsnit: stel $x = 0$

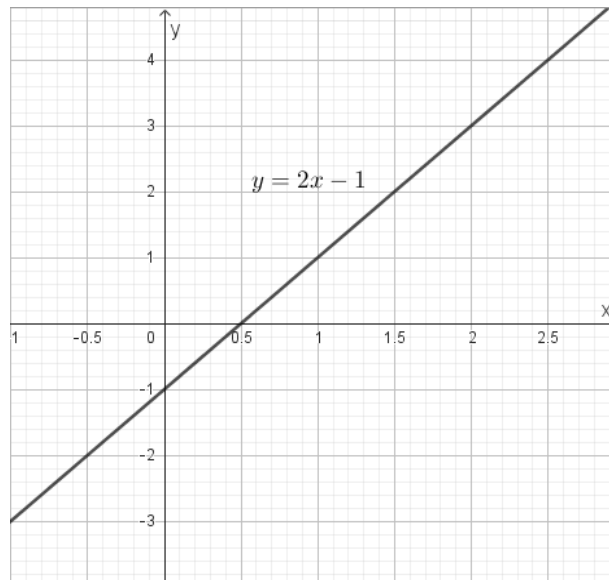
$$y = 2(0) - 1$$

$$y = -1$$

$$\therefore (0; -1)$$

Gebied: $x \in R$

Terrein: $y \in R$

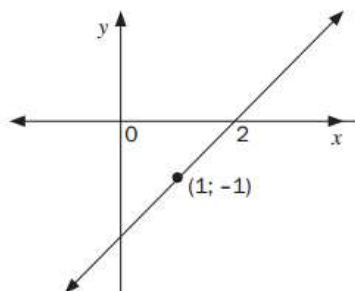


Die funksie is toenemend

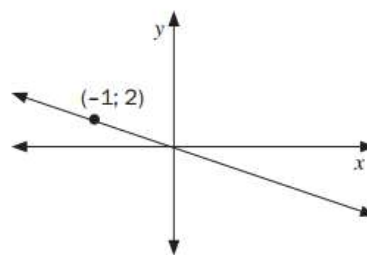
Voorbeeld 2

Determine the equations of the following graphs:

1.



2.



Oplossings

1.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-1 - 0}{1 - 2}$$

$$a = 1$$

$$\therefore y = 1x + c$$

$$0 = 1(2) + c$$

$$c = -2$$

$$y = x - 2$$

2.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{2 - 0}{-1 - 0}$$

$$a = -2$$

$$\therefore y = -2x + c$$

$$0 = -2(0) + c$$

$$c = 0$$

$$y = -2x$$

AFDELING 2: HIPERBOLIESE FUNKSIE (HIPERBOOL)

Die grafiek van $y = \frac{a}{x+p} + q$ • • • • • Standaardvorm van hiperbool

neem kennis dat: $y = \frac{2}{x-2} + 1$

$$= \frac{2}{x + (-2)} + 1$$

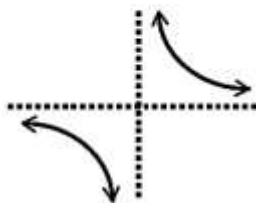
Die vergelykings van die asimptote is: $x = -p$ (vertikale asimptoot) en $y = q$ (horisontale asimptoot)

Definisieversameling (Gebied) : $x \in R, x \neq -p$

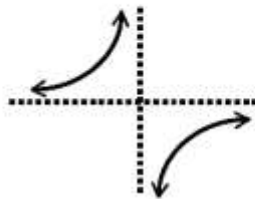
Waardeversameling (Terrein) : $y \in R, y \neq q$

Vorm

As $a > 0$ dan neem die grafiek af vir alle $x < 0$ of $x > 0$



As $a < 0$ dan neem die grafiek toe vir alle $x < 0$ of $x > 0$



Die vergelykings van die simmetrie-asse

Die hiperbool het twee vergelykings vir simmetrie

$m = 1$	$m = -1$
$y = x + c$	$y = -x + c$

N.B Die grafieke van die simmetrie-asse van die hiperbool gaan deur die snypunt van die asimptote, $(-p; q)$.

In die algemeen vir die hiperbool, word die vergelykings van die simmetrie-asse deur die volgende formules gegee:

$m = 1$	$m = -1$
$y = (x + p) + q$	$y = -(x + p) + q$
$\therefore y = x + p + q$	$\therefore y = -x - p + q$

NB – Maak seker dat die hiperbool in standaardvorm is voordat formule toegepas word

Voorbeeld 1

Skets die grafiek van $y = \frac{10}{x+2} - 3$, skryf die gebied en terrein van die funksie neer, en skryf die vergelykings van die asimptote neer. Meld of die grafiek stygend/toenemend of dalend/afnemend is. Laastens, bepaal die vergelyking van die simmetrie-as met 'n positiewe gradiënt.

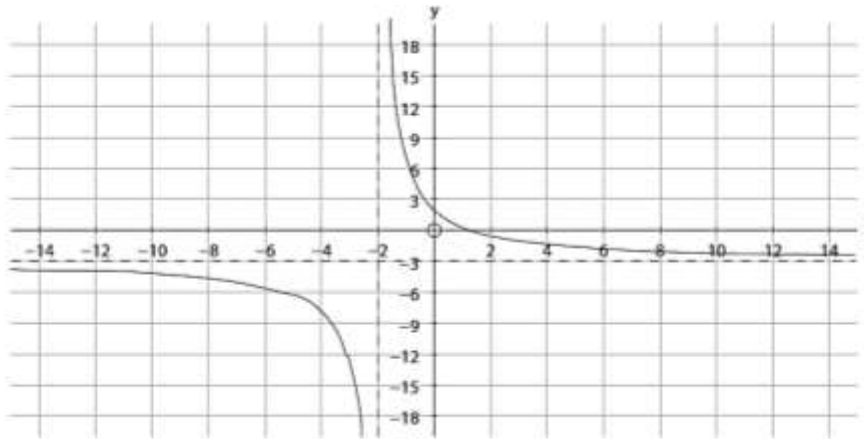
Oplossings

Die asimptote is $x = -2$ en $y = -3$ (Dit word gelees vanaf die vergelyking)

x-afsnit: Laat/Stel: $y = 0$

$$0 = \frac{10}{x+2} - 3 \therefore 10 = 3(x+2) \therefore 3x = 4 \therefore x = \frac{4}{3}$$

y-afsnit: stel $x = 0$ $y = \frac{10}{0+2} - 3 = 5 - 3 = 2$



Grafiek nie volgens skaal geteken nie.

Gebied: $x \in R, x \neq -2$

Terrein: $y \in R, y \neq -3$

Die funksie neem af / dalend

Vergelyking van die simmetrie-as met positiewe gradiënt:

$$y = x + c$$

$$-3 = -2 + c$$

$$c = -1$$

$$\therefore y = x - 1$$

Voorbeeld 2

Skets die grafiek van $y = -1 - \frac{8}{x-4}$, en skryf die gebied en terrein van die funksie neer. Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as met 'n negatiewe gradiënt.

Oplossing

Hierdie vergelyking kan ook geskryf word as $y = \frac{-8}{x-4} - 1$

Asimptote: $x = 4$ en $y = -1$

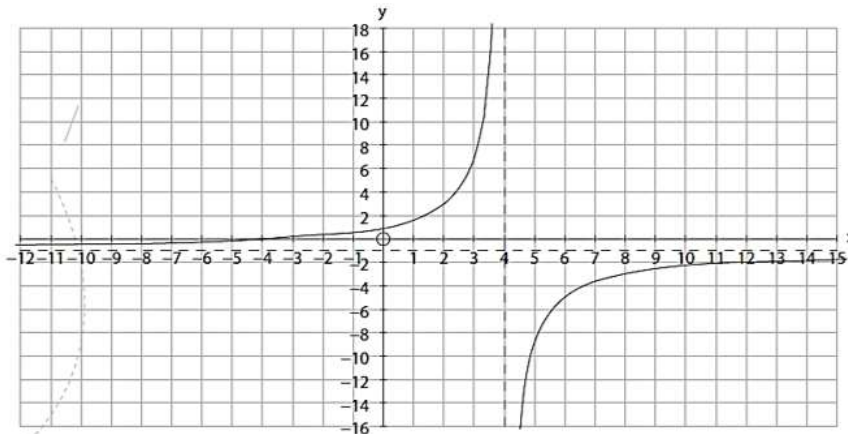
y-afsnit: stel $x = 0$: $y = -1 - \frac{8}{0-4} = -1 + 2 = 1$

x-afsnit: stel $y = 0$:

$$0 = -1 - \frac{8}{x-4} \quad \therefore (x-4) = -8 \quad \therefore x = -4$$

Standaardvorm
van hiperbool

Die hiperbool sal soos volg lyk:



Grafiek nie volgens skaal geteken nie

Gebied: $x \in R, x \neq 4$

Terrein: $y \in R, y \neq -1$

Die funksie neem toe / stygend

Vergelyking van die simmetrie-as met negatiewe gradiënt:

$$y = -x + c$$

$$-1 = -(4) + c$$

$$c = 3$$

$$\therefore y = -x + 3$$

Voorbeeld 3

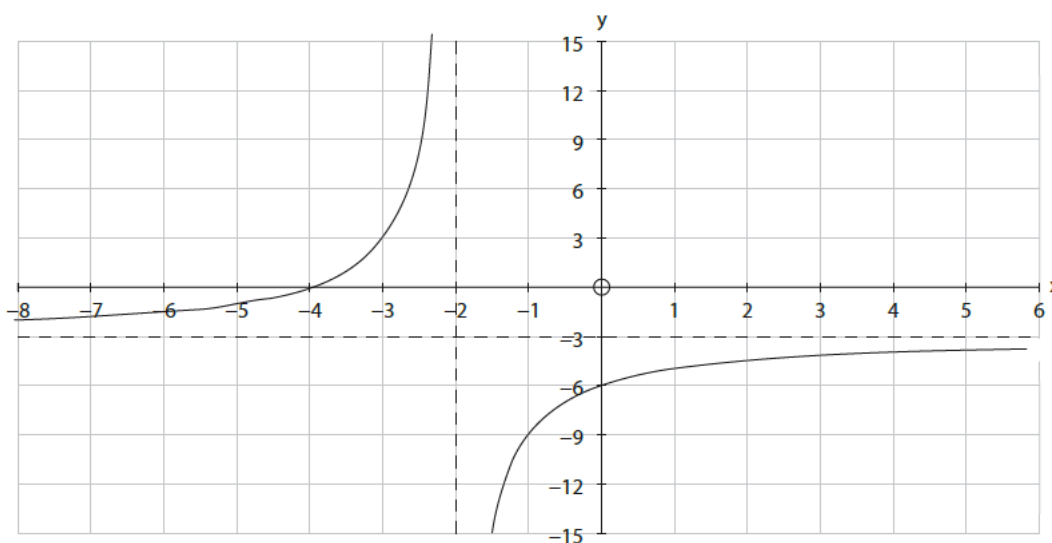
Bepaling van die vergelyking van 'n hiperbool wanneer die grafiek gegee is.

Stap 1: Die posisie van die asimptote gee ons die waardes van p en q in

$$y = \frac{a}{x+p} + q$$

Stap 2: Om die waarde van a te bepaal, vervang ons enige punt op die grafiek in die vergelyking.

Voorbeeld: Die grafiek van $y = \frac{a}{x+p} + q$ is hieronder geskets. Bepaal die waardes van a , p en q .



Vanaf die grafiek sien ons dat, $p = 2$ en $q = -3$

Die vergelyking word dan: $y = \frac{a}{x+2} - 3$

Vervanging van $(0 ; -6)$ of enige ander punt op die grafiek in die vergelyking gee:

$$-6 = \frac{a}{0+2} - 3 \quad \therefore -12 = a - 6 \quad \therefore a = -6$$

$$\therefore y = -\frac{6}{x+2} - 3$$

NB – die funksie neem toe / stygend

AFDELING 3: KWADRATIESE FUNKSIE (PARABOOL)

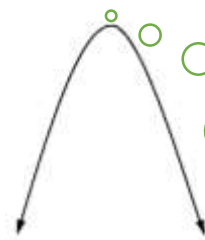
Die grafiek van $y = a(x + p)^2 + q$

As a positief is, d.w.s $a > 0$, dan is die vorm van die grafiek ☺



Minimum
draaipunt

As a negatief is, d.w.s $a < 0$, dan is die vorm van die grafiek ☹



Maximum
draaipunt

Die grafiek het 'n simmetrie-as by $x = -p$

Die grafiek het 'n draaipunt by $(-p; q)$

Gebied: $x \in R$

Terrein: $y \geq q$ ☺ (**WANNEER, $a > 0$**)

of

$y \leq q$ ☹ (**WANNEER, $a < 0$**)

NB

1. q is die minimum van die parabool wanneer $a > 0$

2. q is die maksimum van die parabool wanneer $a < 0$

NB – Die parabool verander van stygend na dalend of dalend na stygend by die draaipunt.

wanneer, $a > 0$

1. Die grafiek neem toe (stygend) vir: $x > -p$

2. Die grafiek neem af (dalend) vir: $x < -p$

wanneer, $a < 0$

1. Die grafiek neem toe (stygend) vir: $x < -p$

2. Die grafiek neem af (dalend) vir: $x > -p$

Die kwadratiese funksie kan ook in die volgende vorm voorgestel word:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Standardvorm van
parabool

Die grafiek van $y = ax^2 + bx + c$

As a positief is, d.w.s $a > 0$, dan is die vorm van die grafiek ☺

Minimum
draaipunt

As a negatief is, d.w.s $a < 0$, dan is die vorm van die grafiek ☹

Maximum
draaipunt

Die grafiek het simmetrie-as by: $x = -\frac{b}{2a}$

Die grafiek het draaipunt by $(-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$

Gebied: $x \in R$

Terrein: $y \geq f(-\frac{b}{2a})$ ☺ (**WANNEER, $a > 0$**)

of

$y \leq f(-\frac{b}{2a})$ ☹ (**WANNEER, $a < 0$**)

NB

1. $f(-\frac{b}{2a})$ is die minimum van
die parabool wanneer, $a > 0$

2. $f(-\frac{b}{2a})$ is die maksimum van
die parabool wanneer, $a < 0$

Voorbeeld 1

Skets die grafiek van $f(x) = x^2 - 5x - 6$, toon die draaipunt en afsnitte met die asse duidelik aan. Gee ook die interval waar die funksie stygend is en waar die funksie dalend is. Bepaal, laastens, die gebied en terrein van $f(x) = x^2 - 5x - 6$.

Oplossing

Skets die grafiek van $f(x) = x^2 - 5x - 6$

1. y-afsnit

$$f(0) = -6$$

Daarom is die koördinate van die y-afsnit $(0; -6)$

2. x-afsnit

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$(x - 6)(x + 1) = 0$$

$$x = 6 \quad \text{of} \quad x = -1$$

$$(6; 0) \text{ en } (-1; 0)$$

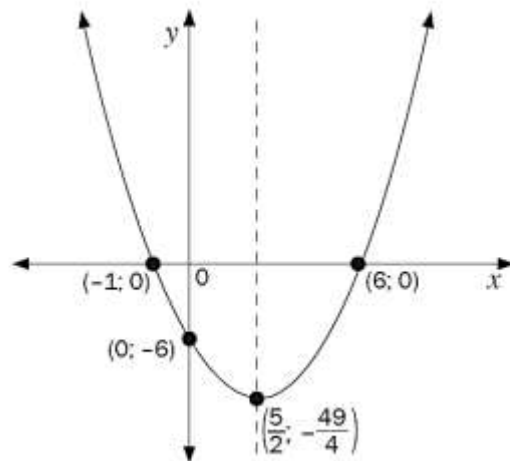
3. Simmetrie-as

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ &= \frac{-(-5)}{2(1)} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

4. Draaipunt

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) - 6 \\ &= -12\frac{1}{4} \\ \therefore TP &\left(\frac{5}{2}; -12\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

5. Sketsgrafiek



6. Die interval waar die grafiek stygend is / toeneem

$$x > \frac{5}{2}$$

Die interval waar die grafiek dalend is / afneem

$$x < \frac{5}{2}$$

7. Gebied : $x \in R$

$$\text{Terrein : } y \geq -\frac{49}{4}$$

Bepaal die vergelyking van 'n kwadratiese funksie

Gegee die x -afsnit en een punt	Gegee die draaipunt en een punt
• Gebruik die formule: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$. • Vervang die waardes van die x-afsnitte. • Vervang die gegewe punte wat nie die x-afsnit is nie. • Los op vir a. • Skryf die vergelyking in die vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.	• Gebruik die formule: $y = a(x + p)^2 + q$. • Vervang die koördinate van die draaipunt $(p; q)$. • Vervang die gegewe punt • Los op vir a. • Skryf die vergelyking in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$ of $f(x) = ax^2 + bx + c$ afhangende van die instruksie in die vraag.
Gegee die koördinate van drie punte op die parabool	
• Gebruik die formule: $y = ax^2 + bx + c$. • Een van die gegewe punte is die y-afsnit, daarom is c gegee, vervang dus sy waarde. • Vervang die koördinate van die ander twee punte in $y = ax^2 + bx + c$. • Los die twee vergelykings gelyktydig op vir a en b.	

BRON: Mind The Gap Wiskunde Studiegids

Voorbeeld 2

Bepaal die vergelyking van die parabool in die vorm $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\therefore y = a(x - (-3))(x - 4)$$

$$\therefore y = a(x + 3)(x - 4)$$

Vervang $(2; -20)$ om die waarde van a te vind

$$-20 = a(2 + 3)(2 - 4)$$

$$\therefore -20 = a(5)(-2)$$

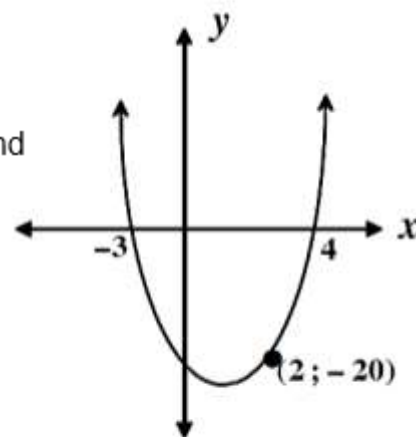
$$\therefore -20 = -10a$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore y = 2(x + 3)(x - 4)$$

$$\therefore y = 2(x^2 - x - 12)$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 - 2x - 24$$



Voorbeeld 3

Bepaal die vergelyking van g in die vorm $y = ax^2 + bx + c$

Die simmetrie-as word gegee deur $x = -1$

$$\therefore x + 1 = 0$$

Vanaf die werk op parabole, is dit duidelik dat die uitdrukking $x + 1$ is in die hakies van die vergelyking vir 'n parabool.

Verder is die waarde van $q = 8$ (die y -waarde van die draaipunt)

$$\therefore y = a(x + 1)^2 + 8$$

Vervang nou die punt $(2; -10)$ wat op die grafiek van die parabool lê in.

$$-10 = a(2 + 1)^2 + 8$$

$$\therefore -18 = a(3)^2$$

$$\therefore -18 = 9a$$

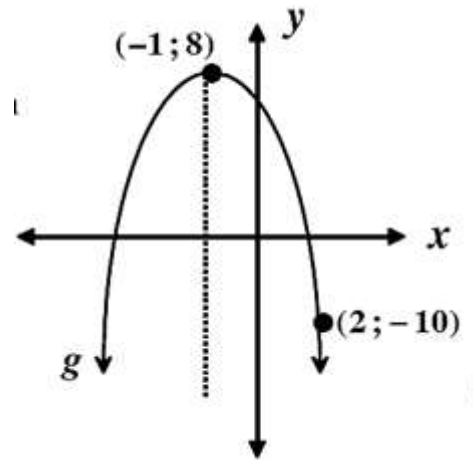
$$\therefore a = -2$$

$$\therefore y = -2(x + 1)^2 + 8$$

$$\therefore y = -2(x^2 + 2x + 1) + 8$$

$$\therefore y = -2x^2 - 4x - 2 + 8$$

$$\therefore y = -2x^2 - 4x + 6$$



AFDELING 4: EKSPONENSIALE FUNKSIE

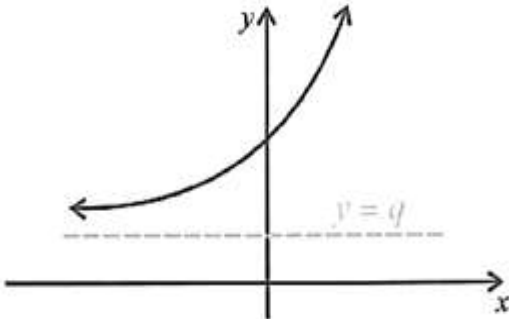
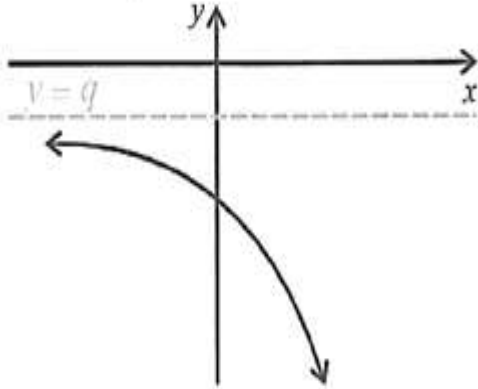
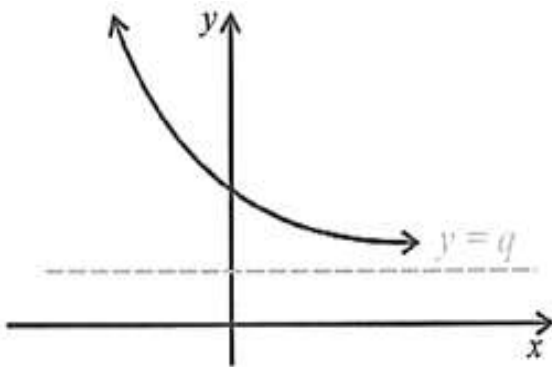
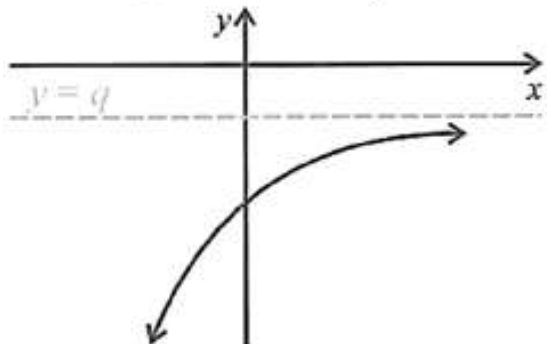
Standaardvorm
van eksponensiale
funksie

Die grafiek van $y = a \cdot b^{x+p} + q$; waar $b > 0$ en $b \neq 1$

Die vergelyking van die asimptoot is: $y = q$ (*horisontale asimptoot*)

Gebied: $x \in \mathbb{R}$

Terrein: $y > q$ [as $a > 0$] of $y < q$ [as $a < 0$]

$a > 0$ en $b > 1$	$a < 0$ en $b > 1$
Die grafiek lê bo die horisontale asimptoot en is 'n stygende funksie.	Die grafiek lê onder die horisontale asimptoot en is 'n dalende funksie.
	
$a > 0$ en $0 < b < 1$	$a < 0$ en $0 < b < 1$
Die grafiek lê bo die horisontale asimptoot en is 'n dalende funksie.	Die grafiek lê onder die horisontale asimptoot en is 'n stygende funksie.
	

(BRON: MATHS MADE EASY – A comprehensive guide to Grade 12 Mathematics)

Voorbeeld 1

Skets die grafiek van $y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4$

Horisontale asimptoot: $y = -4$

x-afsnit: stel $y = 0$

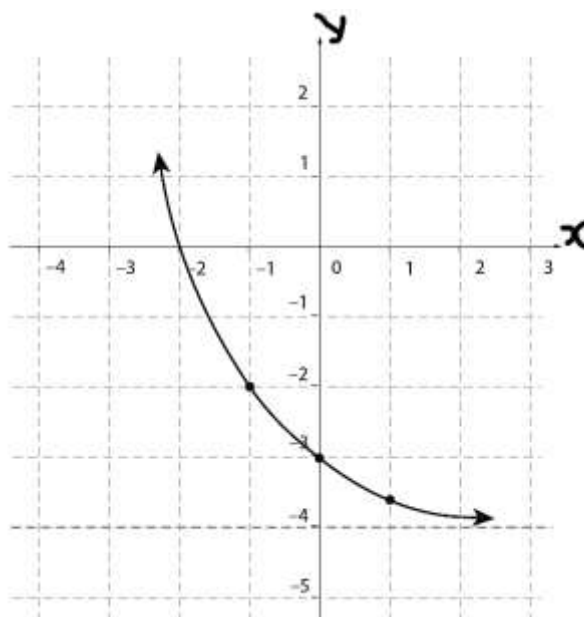
$$0 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4 \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\therefore x+1 = -1 \quad \therefore x = -2$$

y-afsnit: stel $x = 0$

$$y = -3$$



NB: Die funksie is dalend / neem af

Voorbeeld 2

Kom on kyk na 'n tweede voorbeeld, $y = 3 \cdot (3)^{x-2} + 1$

Horisontale asimptoot: $y = 1$

$$0 = 3 \cdot (3)^{x-2} + 1$$

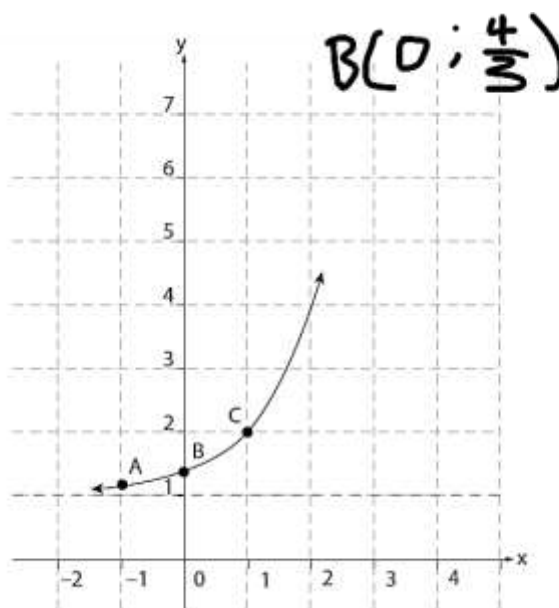
x-afsnit: $\therefore 3(3)^{x-2} = -1$

$\therefore$ Geen x-afsnit(te)

y-afsnit: stel $x = 0$

$$y = \frac{4}{3}$$

NB – Die funksie is stygend / neem toe



Bepaling van die vergelyking van 'n eksponentiale funksie

Voorbeeld 3

Bepaal die vergelyking van : $g(x) = b^{x+1} + q$

Horisontale asimptoot: $y = -2$

Daarom is die waarde van $q = -2$

$$\therefore y = b^{x+1} - 2$$

Vervang nou die punt $(-3 ; 2)$ in die vergelyking om b te kry.

$$2 = b^{-3+1} - 2$$

$$\therefore 4 = b^{-2}$$

$$\therefore 4 = \frac{1}{b^2}$$

$$\therefore 4b^2 = 1$$

$$\therefore 4b^2 - 1 = 0$$

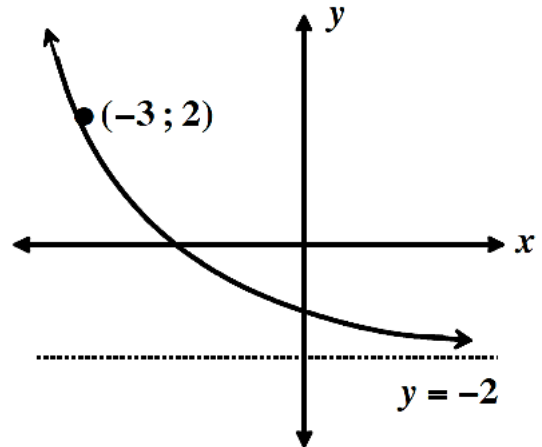
$$\therefore (2b+1)(2b-1) = 0$$

$$\therefore b = -\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\text{But } b \neq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

Daarom is die vergelyking: $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2$



Neem kennis:

Omdat $b > 0$, kon jy die vergelyking

$4b^2 = 1$ soos volg opgelos het.

$$4b^2 = 1$$

$$\therefore b^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

TRANSFORMASIE VAN FUNKSIES

REFLEKSIES EN TRANSLASIES

Gegee: $f(x) = \frac{2}{x+1} - 3$	Gegee: $f(x) = 2 \cdot 3^{x-2} + 4$	Gegee: $f(x) = x^2 + 5x + 6$
a. Die grafiek van $g(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$, 2 eenhede op en 3 eenhede na links te skuif. Bepaal die vergelyking van $g(x)$. Oplossing $g(x) = f(x + 3) + 2$ $= \frac{2}{x+3+1} - 3 + 2$ $= \frac{2}{x+4} - 1$	a. Die grafiek van $g(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$, 2 eenhede op en 3 eenhede na links te skuif. Bepaal die vergelyking van $g(x)$. Oplossing $g(x) = f(x + 3) + 2$ $= 2 \cdot 3^{x+3-2} + 4 + 2$ $= 2 \cdot 3^{x+1} + 6$	a. Die grafiek van $g(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$, 2 eenhede af en 3 eenhede na regs te skuif. Bepaal die vergelyking van $g(x)$. Oplossing $g(x) = f(x - 3) - 2$ $= (x - 3)^2 + 5(x - 3) + 6 - 2$ $= x^2 - 6x + 9 + 5x - 15 + 4$ $= x^2 - x - 2$
b. Die grafiek van $h(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $x - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $h(x)$. Oplossing $h(x) = -f(x)$ $= -\left(\frac{2}{x+1} - 3\right)$ $= -\frac{2}{x+1} + 3$	b. Die grafiek van $h(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $x - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $h(x)$. Oplossing $h(x) = -f(x)$ $= -(2 \cdot 3^{x-2} + 4)$ $= -2 \cdot 3^{x-2} - 4$	b. Die grafiek van $h(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $x - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $h(x)$. Oplossing $h(x) = -f(x)$ $= -(x^2 + 5x + 6)$ $= -x^2 - 5x - 6$
c. Die grafiek van $m(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $y - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $m(x)$. Oplossing $m(x) = f(-x)$ $= \frac{2}{-x+1} - 3$ $= \frac{2}{-(x-1)} - 3$ $= -\frac{2}{x-1} - 3$	c. Die grafiek van $m(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $y - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $m(x)$. Oplossing $m(x) = f(-x)$ $= 2 \cdot 3^{-x-2} + 4$ $= 2 \cdot 3^{-(x+2)} + 4$ $= 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} + 4$	c. Die grafiek van $m(x)$ word verkry deur die grafiek van $f(x)$ in die $y - as$ te reflekteer. Bepaal die vergelyking van $m(x)$. Oplossing $m(x) = f(-x)$ $= (-x)^2 + 5(-x) + 6$ $= x^2 - 5x + 6$

AFDELING 5: INVERSE FUNKSIES

Die konsep van 'n funksie.

'n Funksie, f word gedefinieer as 'n verwantskap tussen waardes, waar elke invoer waarde op een uitvoer waarde afbeeld.

In ander woorde, vir 'n vergelyking om 'n funksie genoem te word, kan daar slegs een y -waarde vir 'n sekere x -waarde wees.

Daar is twee tipes funksies:

1. Een-tot-Een Funksies
2. Baie-tot-Een Funksies

EEN-TOT-EEN FUNKSIES

'n Een-to-Een funksie is 'n funksie waar daar 'n enkele y -waarde vir 'n sekere x -waarde is.

BAIE-TOT-EEN FUNKSIES

'n Funksie kan nie meer as een y -waarde vir elke x -waarde het nie. 'n Funksie kan egter meer as een x -waarde vir 'n sekere y -waarde het. Dit staan bekend as baie-tot-een funksies.

VERTIKALE LYN TOETS

Om te toets of 'n grafiek 'n funksie is, gebruik die vertikale lyn toets. As 'n vertikale lyn ('n lyn ewewydig aan die y -as) die grafiek by meer as een plek sny, is die grafiek nie 'n funksie nie. Jy hoef nie die lyn te teken/trek nie, hou net 'n liniaal ewewydig aan die y -as, en beweeg dit van links na regs. As die liniaal die grafiek meer as eenkeer raak vir 'n enkele x -waarde, enige plek op die grafiek, dan is die grafiek nie 'n funksie nie. In die geval waar die grafiek nie 'n funksie is nie, word dit 'n relasie genoem.

HORISONTALE LYN TOETS

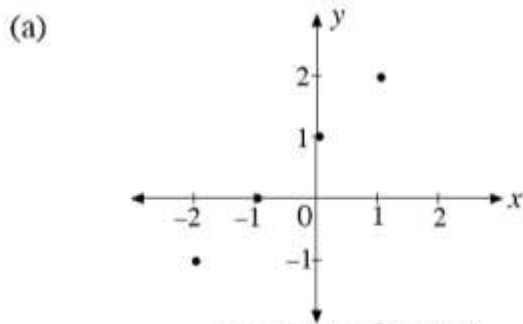
As 'n grafiek die vertikale lyn toets slaag is dit 'n funksie. Die horisontale lyn toets kan gebruik word om te bepaal watter tipe funksie dit voorstel.

As 'n horisontale lyn ('n lyn ewewydig aan die x -as) geteken/getrek word en op en af geskuif word en die grafiek meer as een plek raak, is dit 'n baie-tot-een funksie. (baie x -waardes tot 'n enkele y -waarde. Anders is dit 'n een-tot-een funksie.

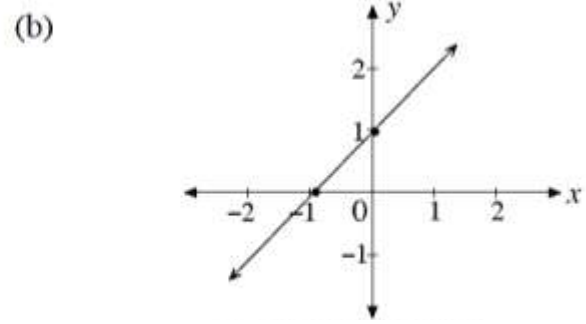
(BRON: MATHS MADE EASY – A comprehensive guide to Grade 12 Mathematics)

Voorbeelde

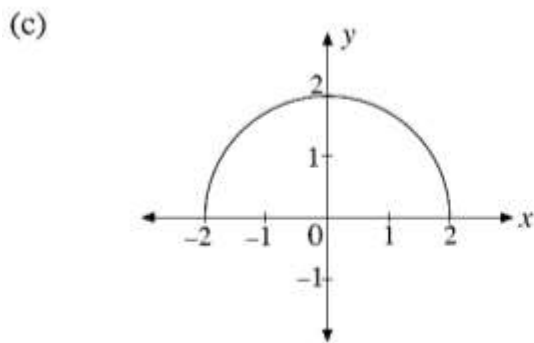
Bepaal of die volgende relasies funksies is of nie. Indien die grafiek 'n funksie is, bepaal of die funksie een-tot-een of baie-tot-een is.



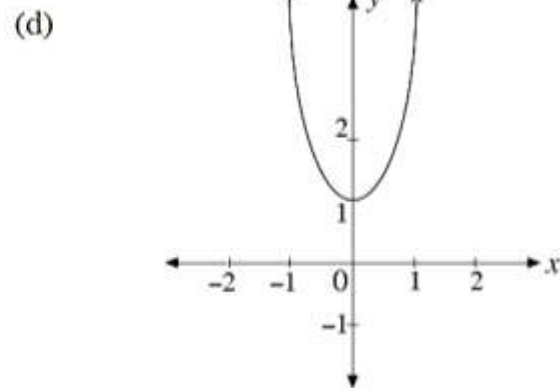
een-tot-een funksie



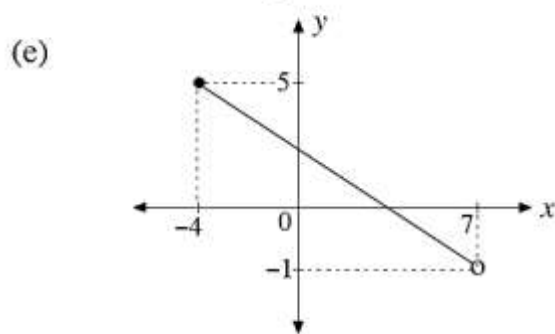
een-tot-een funksie



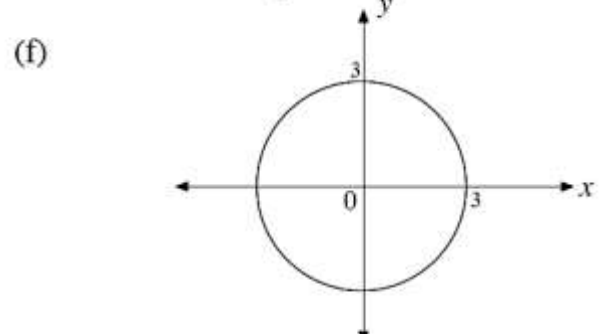
baie-tot-een funksie



baie-tot-een funksie



een-tot-een funksie



nie 'n funksie nie

(BRON: Mind Action series Mathematics12 Textbook and Workbook)

Inverse Funksie

- Die inverse van 'n funksie neem die y-waardes (terrein) van die funksie na die ooreenkomstige x-waardes (gebied) van die funksie en omgekeerd. Daarom word die x- en y-waardes omgeruil.
- Die funksie is gereflekteer om die lyn $y = x$ om die inverse te vorm.
- Die notasie vir die inverse van 'n funksie is f^{-1} .
- NB – Die gebied van die inverse is die terrein van die funksie en die terrein van die inverse is die gebied van die funksie.
- Wanneer die funksie toeneem/styg, dan is die inverse ook toenemend/stygend. Wanneer die funksie afneem/daal, dan is die inverse ook afnemend/dalend.

Inverse funksie : Lineêr ($y = ax + q$)

Voorbeeld 1

Gegee: $f(x) = 2x + 6$

1. Bepaal $f^{-1}(x)$
2. Skets die grafieke van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ en $y = x$ op dieselfde assestelsel.

Oplossing

1. Ten einde die inverse van 'n funksie te kry is daar twee stappe.

Stap 1: Ruil die x en y om

$$y = 2x + 6$$

$$\text{word } x = 2y + 6$$

Ons herskryf dan die vergelyking om y die onderwerp van die formule te maak.

Stap 2: Maak y die onderwerp van die formule.

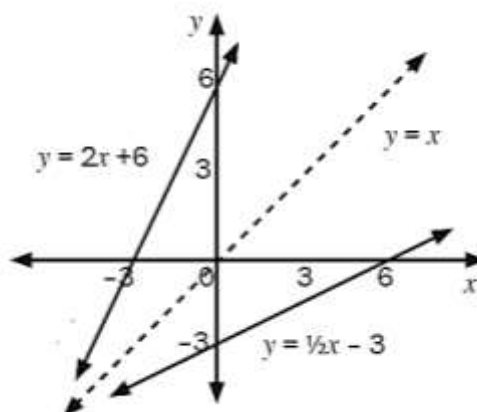
$$x = 2y + 6$$

$$x - 6 = 2y$$

$$\text{So } y = \frac{1}{2}x - 3$$

Ons kan dus sê dat die inverse funksie is:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3$$



Inverse funksie : Kwadratiese ($y = ax^2$)

Voorbeeld 2

- (a) Skets $f(x) = 2x^2$
(b) Bepaal die inverse van $f(x)$
(c) Skets $f^{-1}(x)$ en $y = x$ op dieselfde assestelsel as $f(x)$.

OPLOSSING

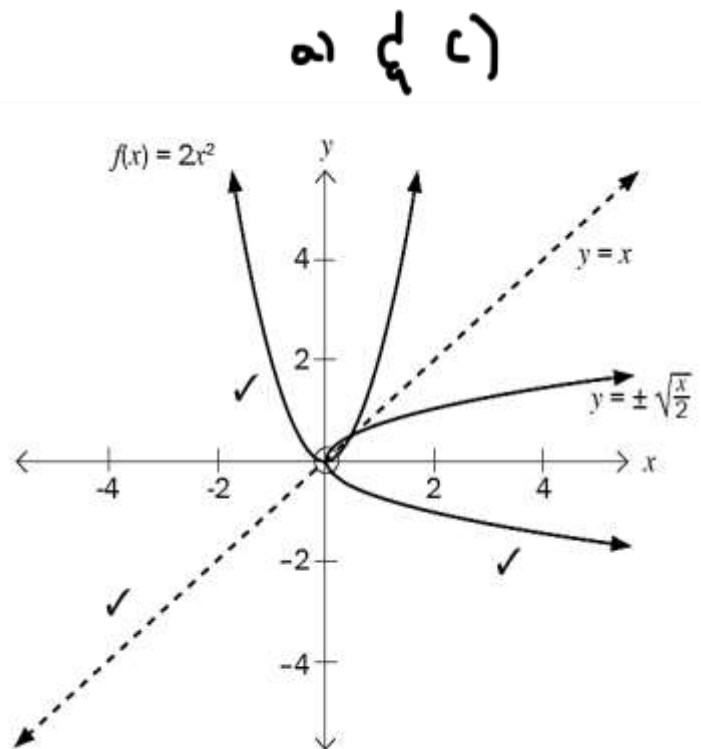
Solution

1. b) $y = 2x^2$

$$x = 2y^2 \quad \checkmark$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{x}{2}} \quad \checkmark$$

- Hierdie is nie 'n funksie nie.
- Ondersoek dit met die vertikale lyn toets. Daar is twee y -waardes vir een x -waarde
- Nie alle inverses van funksies is ook funksies nie. Sommige inverses is relasies.
- Indien 'n inverse nie 'n funksie is nie, dan kan ons die gebied van die funksie beperk, sodat die inverse ook 'n funksie is.



- Om die inverse 'n funksie te maak, moet ons 'n stel x -waardes in die funksie kies en slegs daarmee werk. Ons noem dit "**beperking van die gebied**".
- 'n een-tot-een funksie se inverse is ook 'n funksie.
- Byvoorbeeld: $y = 3x + 4$ is 'n een-tot-een funksie. Vir elke x -waarde is daar slegs een y -waarde.
- 'n Baie-tot-een funksie se inverse is nie 'n funksie nie. Ons kan egter die gebied van die funksie beperk sodat die inverse ook 'n funksie is.
Byvoorbeeld: $y = 2x^2$ is 'n baie-tot-een funksie. Vir twee of baie x -waardes is daar slegs een y -waarde. (as $x = 2$ dan is $y = 8$ / as $x = -2$ dan is $y = 8$)
Daarom is die inverse : $y = \pm \sqrt{\frac{x}{2}}$ nie 'n funksie nie.
- Om te kyk/uit te vind of 'n grafiek 'n funksie is, teken 'n vertikale lyn. Indien die vertikale lyn die grafiek slegs by een plek sny, dan is die grafiek 'n funksie. Indien enige vertikale lyn die grafiek by meer as een plek sny, dan is die grafiek nie 'n funksie nie.

- Om te kyk/uit te vind of dit een-tot-een of baie-tot-een funksie is, teken 'n horisontale lyn. As enige horisontale lyn die grafiek slegs eenkeer sny, is dit 'n een-tot-een funksie. As enige horisontale lyn die grafiek by meer as een plek sny, dan is die grafiek 'n baie-tot-een funksie.

Voorbeeld 3

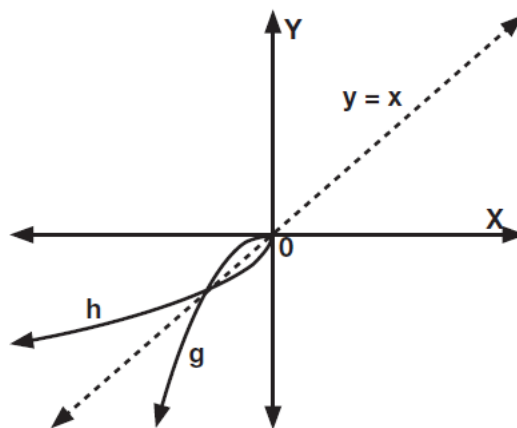
Gegee: $g(x) = -x^2$; waar $x \leq 0$

- (a) Skryf die vergelyking van die inverse van g , g^{-1} in die vorm $h(x) = \dots$
 (b) Skets die grafiek van g , h en $y = x$ op dieselfde assestelsel.

OPLOSSING

(a) $y = -x^2$
 $x = -y^2$
 $-x = y^2$
 $\pm\sqrt{-x} = y$
 $-\sqrt{-x} = y$; waar $x \leq 0$
 $\therefore h(x) = -\sqrt{-x}$

(b)



Inverse funksie : Eksponensiaal:

$$y = b^x; (b > 0, b \neq 1)$$

Voorbeeld 4

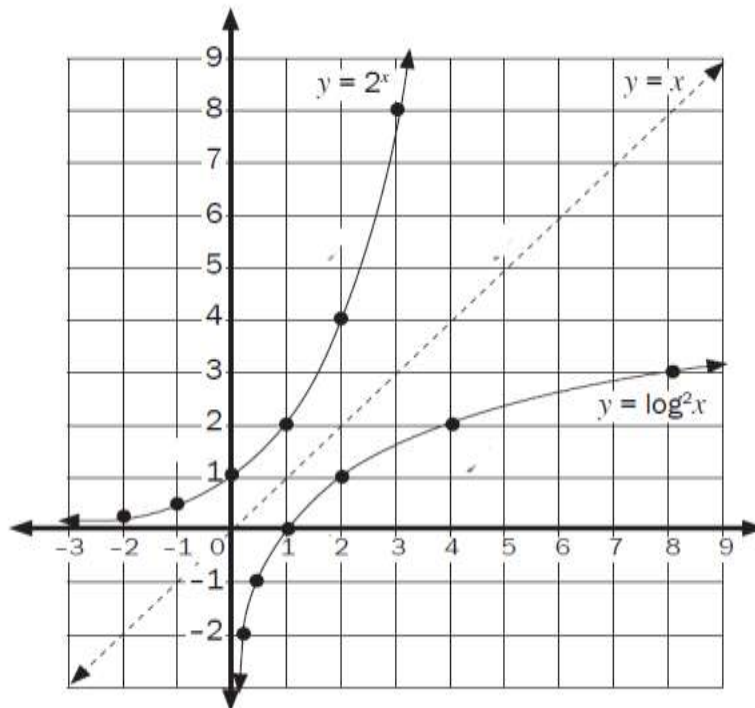
Gegee: $f(x) = 2^x$

- (a) Bepaal f^{-1} in die vorm $y = \dots$
- (b) Skets die grafieke van $f(x)$, $f^{-1}(x)$ en $y = x$ op dieselfde assestelsel.
- (c) Skryf die gebied en terrein van $f(x)$ en $f^{-1}(x)$ neer.

Oplossing

- (a) Die inverse van die eksponentiale funksie $y = 2^x$ is $x = 2^y$ wat dan geskryf kan word as $y = \log_2 x$

b)



- c) Die gebied en terrein van $f(x)$

Gebied: $x \in \mathbb{R}$

Terrein: $y > 0$

Die gebied en terrein van $f^{-1}(x)$

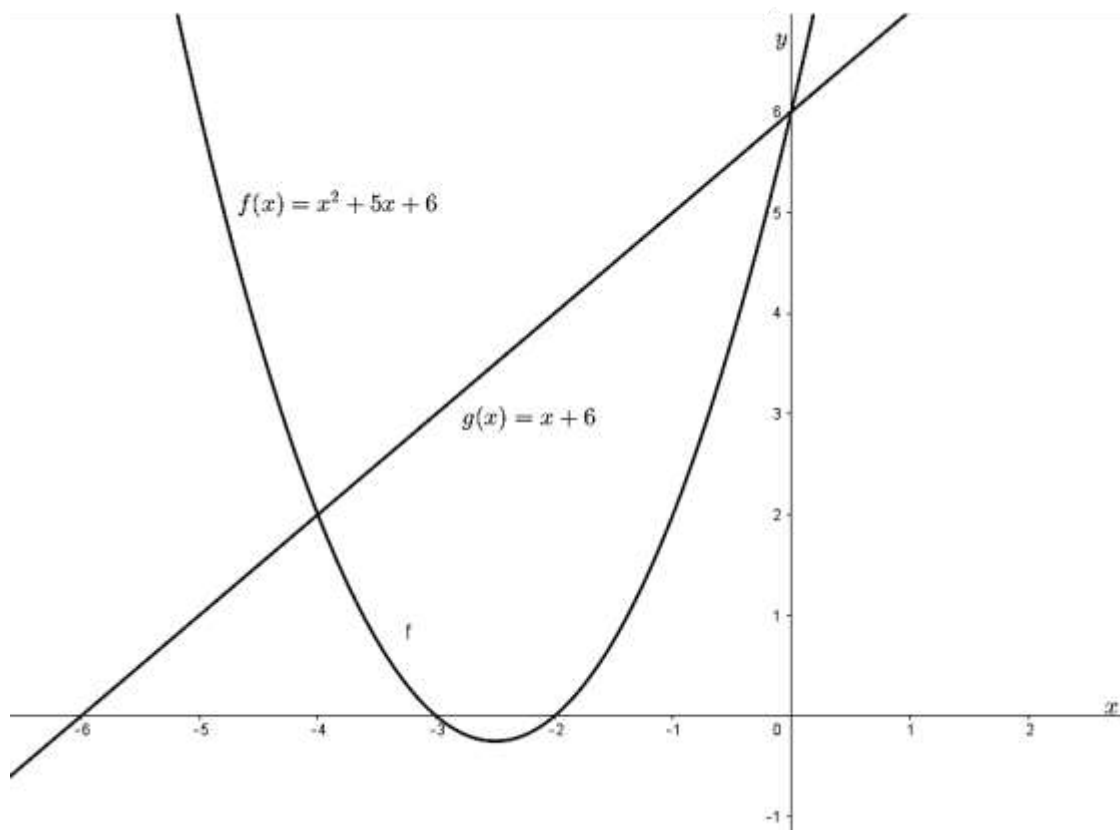
Gebied: $x > 0$

Terrein: $y \in \mathbb{R}$

AFDELING 6: KOMBINASIES

Neem kennis van die volgende wanneer met kombinasies van funksies gewerk word:

Beskou die grafieke van f en g hieronder

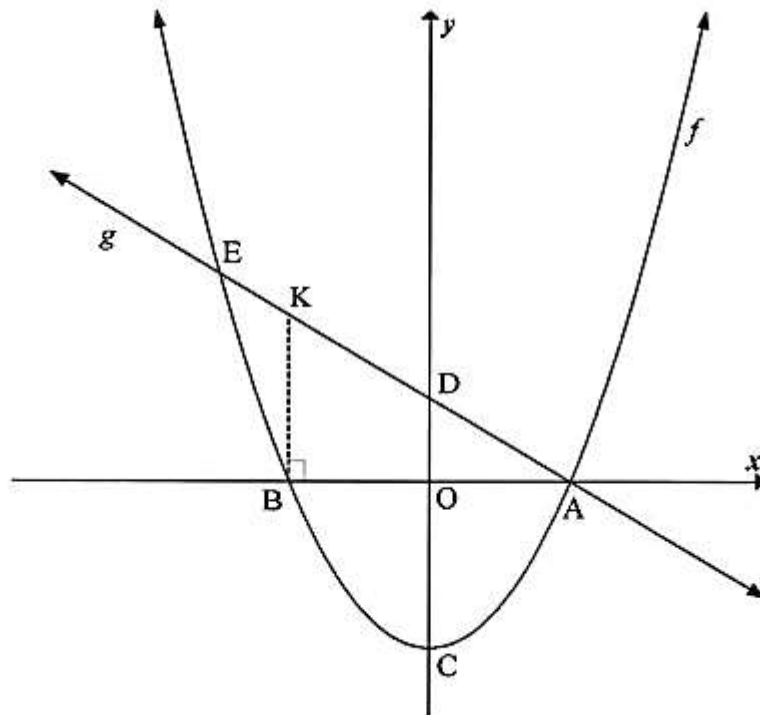


Vir $f(x) > 0$ of $f(x) < 0$	Vir $f(x) > g(x)$ of $f(x) < g(x)$	Vir $f(x) \cdot g(x) > 0$ of $f(x) \cdot g(x) < 0$
Fokus op die x - as. $f(x) > 0$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ positief is, wat bokant die x - as sal wees. En $f(x) < 0$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ negatief is, wat onder die x - as sal wees.	$f(x) > g(x)$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ bo die grafiek van $g(x)$ is. En $f(x) < g(x)$ beteken waar die grafiek van $f(x)$ onder die grafiek van $g(x)$ is.	$f(x) \cdot g(x) > 0$ beteken waar die produk van $f(x)$ en $g(x)$ positief is. En $f(x) \cdot g(x) < 0$ beteken waar die produk van $f(x)$ en $g(x)$ negatief is.

Voorbeeld 1

VRAAG 5

Die grafieke van $f(x) = x^2 - 4$ en $g(x) = -x + 2$ is hieronder geskets. A en B is die x -afsnitte van f . C en D is die y -afsnitte van f en g onderskeidelik. K is 'n punt op g sodat $BK \parallel x$ -as. f en g sny by A en E.



5.1 Skryf die koördinate van C neer.

5.2. Skryf die koördinate van D neer.

5.3 Bepaal die lengte van CD.

5.4 Bereken die koördinate van B.

5.5 Bepaal die koördinate van E, 'n snypunt van f en g .

5.6 Vir watter waarde(s) van x is:

5.6.1 $f(x) < g(x)$

5.6.2 $f(x) \cdot g(x) \geq 0$

5.7 Bereken die lengte van AK.

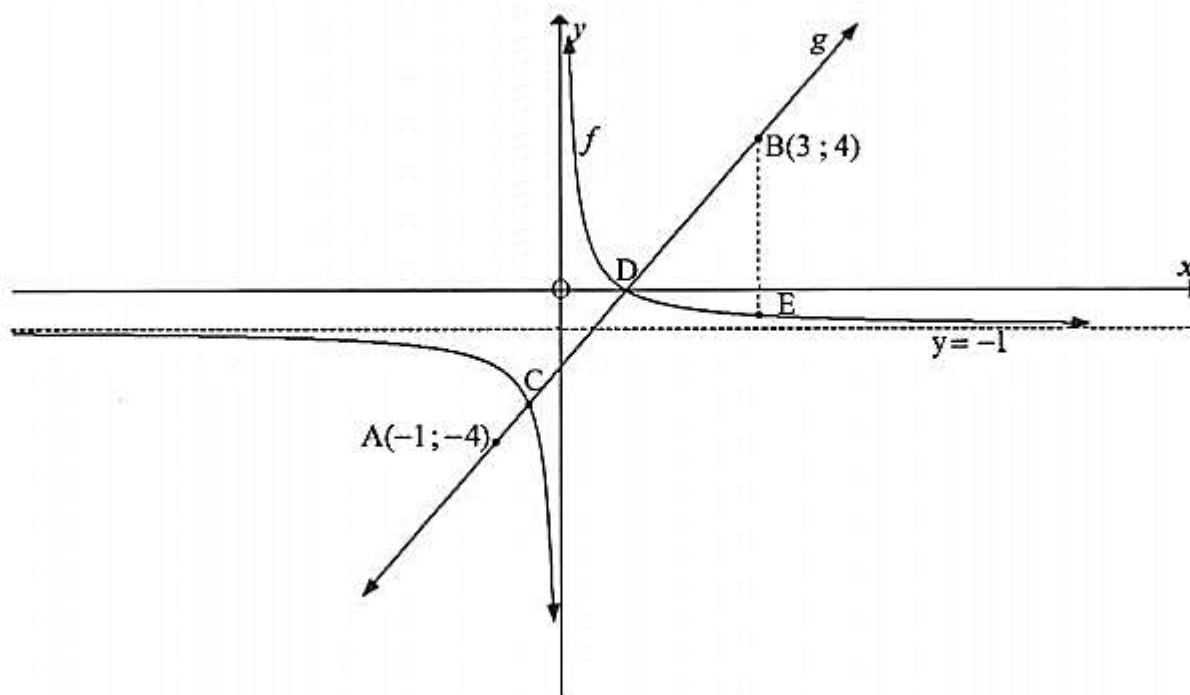
OPLOSSINGS
VRAAG 5

5.1	$C(0 ; -4)$
5.2	$D(0 ; 2)$
5.3	$CD = 2 - (-4)$ $CD = 6 \text{ units/eenhede}$
5.4	$x^2 - 4 = 0$ $(x - 2)(x + 2) = 0$ $x = 2 \quad x = -2$ $B(-2 ; 0)$
5.5	$x^2 - 4 = -x + 2$ $x^2 + x - 6 = 0$ $(x - 2)(x + 3) = 0$ $x = 2 \quad x = -3$ $E(-3 ; 5)$
5.6.1	$-3 < x < 2$ OR/OF $(-3 ; 2)$
5.6.2	$(-\infty ; -2] \cup \{2\}$
5.7	$K(-2 ; 4)$ $BK = 4 \text{ units/eenhede}$ $AB = 4 \text{ units/eenhede}$ $AK = \sqrt{4^2 + 4^2} \text{ (Pythagoras)}$ $= 5,66 \text{ units/eenhede}$

Voorbeeld 2

VRAAG 5

Die skets hieronder toon f en g , die grafieke van $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ en $g(x) = ax + q$ onderskeidelik. Punte $A(-1; -4)$ en $B(3; 4)$ lê op die grafiek g . Die twee grafieke sny by punte C en D. Lyn BE is ewewydig aan die y -as geteken, met E op f .



- 5.1 Toon aan dat $a = 2$ en $q = -2$
- 5.2 Bepaal die waardes van x waarvoor $f(x) = g(x)$.
- 5.3 Vir watter waardes van x is $g(x) \geq f(x)$?
- 5.4 Bereken die lengte van BE.
- 5.5 Skryf 'n vergelyking van h neer, as $h(x) = f(x) + 3$

OPLOSSINGS

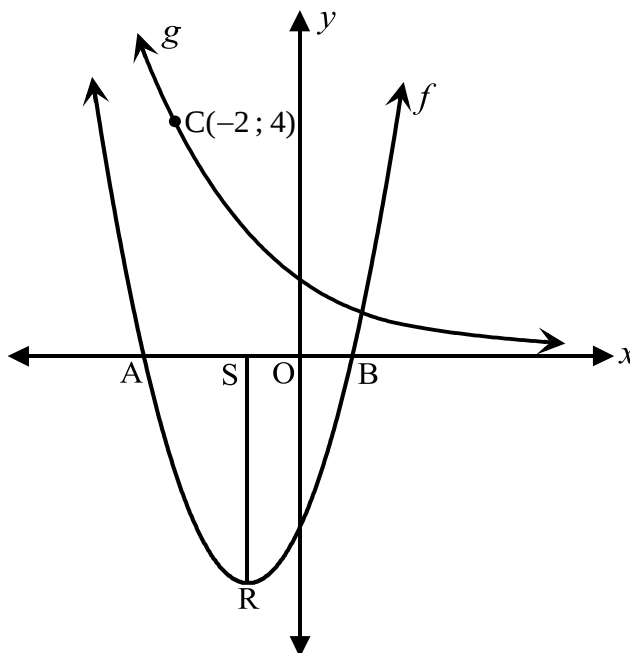
5.1	$a = \text{gradient of } g$ $= \frac{-4 - 4}{-1 - 3}$ $= 2$ $4 = 2(3) + q$ $q = -2$ $g(x) = 2x - 2$
5.2	$\frac{1}{x} - 1 = 2x - 2$ $\frac{1}{x} = 2x - 1$ $1 = 2x^2 - x$ $2x^2 - x - 1 = 0$ $(2x + 1)(x - 1) = 0$ $x = -\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad x = 1$

5.3	$-\frac{1}{2} \leq x < 0 \quad \text{or/of} \quad x \geq 1$ OR/OF $\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup [1; \infty)$
5.4	$f(3) = \frac{1}{3} - 1$ $= -\frac{2}{3}$ Length of BE = $4 - f(3)$ $= 4 - \left(-\frac{2}{3}\right)$ $= 4 + \frac{2}{3}$ $= 4\frac{2}{3}$ OR/OF $\text{BE} = 2x - 2 - \frac{1}{x} + 1$ $= \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ $(x=3) \text{ BE} = \frac{2(3)^2 - (3) - 1}{3}$ $= \frac{18 - 4}{3}$ $= 4\frac{2}{3}$
5.5	$h(x) = f(x) + 3$ $h(x) = \frac{1}{x} + 2$

Voorbeeld 3

VRAAG 1

Die grafieke van $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ en $g(x) = a^x$ word in die skets hieronder voorgestel. A en B is die x-afsnitte van f en R is die draaipunt van f . Die punt $C(-2; 4)$ is 'n punt op die grafiek van g .



- 1.1 Toon aan dat $a = \frac{1}{2}$.
- 1.2 Bepaal die lengte van AB .
- 1.3 Bepaal die lengte van SR .
- 1.4 Skryf die vergelyking van h neer, as h die refleksie van f in die y -as is. Druk jou antwoord in die vorm $h(x) = a(x + p)^2 + q$ uit.
- 1.5 Skryf die vergelyking van g^{-1} in die vorm $y = \dots$.
- 1.6 Skets die grafiek van $y = g^{-1}(x)$ op 'n assestelsel.
- 1.7 Bepaal die waardes van x waarvoor:
 - 1.7.1 $g^{-1}(x) \geq -2$

OPLOSSINGS

1.1

$$y = a^x$$

$$\therefore 4 = a^{-2}$$

$$\therefore 4 = \frac{1}{a^2}$$

$$\therefore 4a^2 = 1$$

$$\therefore a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

1.2

$$0 = 2x^2 + 4x - 6$$

$$\therefore 0 = x^2 + 2x - 3$$

$$\therefore 0 = (x+3)(x-1)$$

$$\therefore x = -3 \text{ or } x = 1$$

$$\therefore AB = 4 \text{ eenhede}$$

1.3

$$x_R = -\frac{4}{2(2)} = -1$$

$$\therefore y_R = 2(-1)^2 + 4(-1) - 6 = -8$$

$$\therefore SR = 8 \text{ eenhede}$$

Alternatiewelik:

$$f'(x) = 4x + 4$$

$$\therefore 0 = 4x + 4$$

$$\therefore x = -1$$

1.4

$$h(x) = 2(x-1)^2 - 8$$

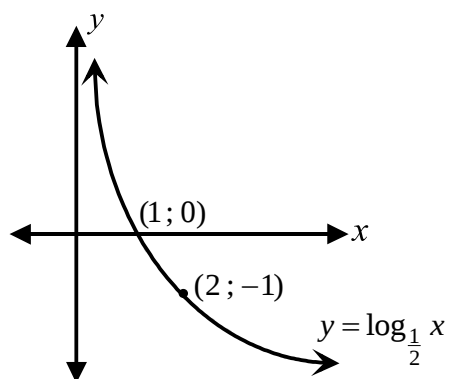
1.5

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

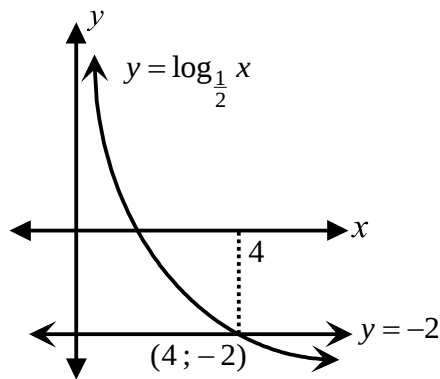
$$\therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$$

$$\therefore y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

1.6



1.7.1



$$\log_{\frac{1}{2}} x = -2$$

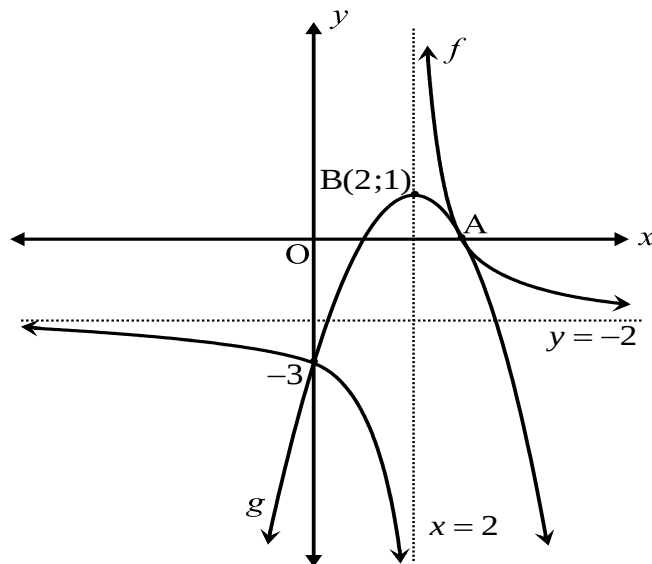
$$\therefore x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

$$\therefore g^{-1}(x) \geq -2 \text{ vir alle } 0 < x \leq 4$$

Voorbeeld 4

VRAAG 1

In die diagram hieronder, sny die grafiek van $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$ die y -as by -3 en die x -as by A. Die grafiek van $g(x) = m(x+n)^2 + c$ sny f by A, sny die y -as by -3 en het 'n draaipunt by B(2;1).



Bepaal:

- 1.1 die vergelyking van f .
- 1.2 die vergelyking van g .
- 1.3 die lengte van OA.
- 1.4 die waardes van x waarvoor $f(x) \cdot g(x) \leq 0$.

OPLOSSINGS

1.1

$$y = \frac{a}{x-2} - 2$$

Vervang: (0 ; -3) :

$$-3 = \frac{a}{0-2} - 2$$

$$\therefore -1 = \frac{a}{-2}$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{x-2} - 2$$

1.2

$$y = m(x-2)^2 + 1$$

Vervang: (0 ; -3):

$$\therefore -3 = m(0-2)^2 + 1$$

$$\therefore -4 = m(-2)^2$$

$$\therefore -4 = 4m$$

$$\therefore m = -1$$

$$\therefore g(x) = -(x-2)^2 + 1$$

1.3

$$0 = \frac{2}{x-2} - 2$$

$$\therefore 0 = 2 - 2(x-2)$$

$$\therefore 0 = 2 - 2x + 4$$

$$\therefore 2x = 6$$

$$\therefore x = 3$$

$$\therefore OA = 3 \text{ eenhede}$$

Alternatiewelik:

$$0 = -(x-2)^2 + 1$$

$$\therefore (x-2)^2 = 1$$

$$\therefore x^2 - 4x + 4 = 1$$

$$\therefore x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\therefore (x-1)(x-3) = 0$$

$$x = 1 \text{ or } x = 3$$

$$\therefore OA = 3 \text{ eenhede}$$

1.4

$$f(x).g(x) \leq 0 \text{ vir alle}$$

$$1 \leq x < 2 \text{ of } x = 3$$

AFDELING 7: DIE GEMIDDELDE GRADIËNT TUSSEN TWEE PUNTE

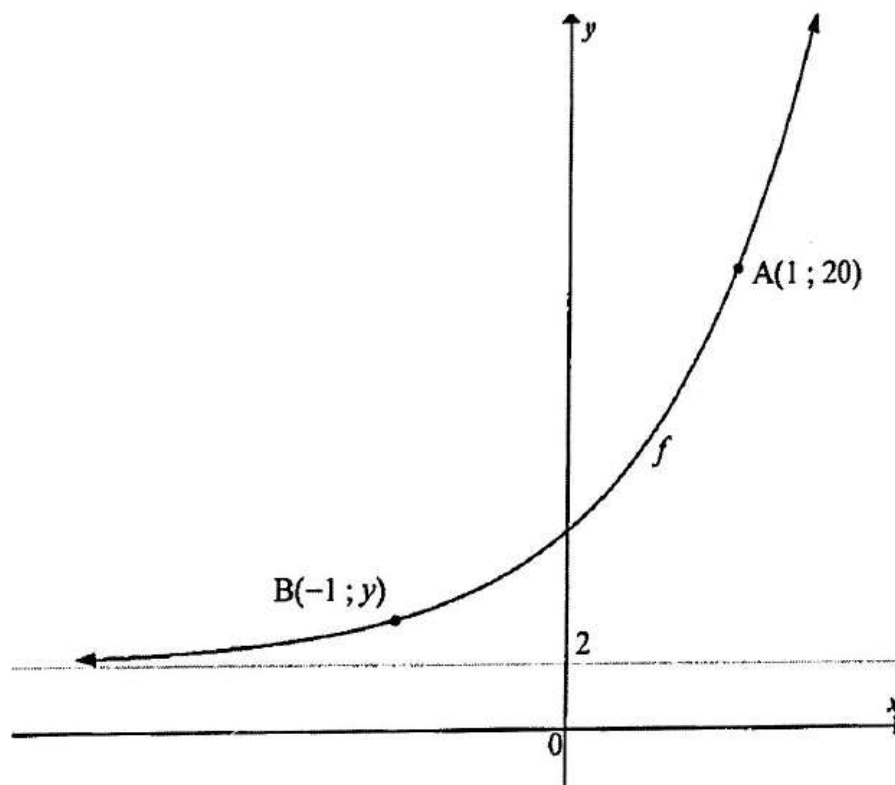
Die **gemiddelde gradiënt** van 'n funksie tussen twee punte word gedefinieer as die **gradiënt van die lyn** wat die twee punte verbind.

Voorbeeld

Die skets hieronder is die grafiek van $f(x) = 2 \cdot b^{x+1} + q$

Die grafiek van f gaan deur die punte $A(1; 20)$ en $B(-1; y)$

Die lyn $y = 2$ is 'n asimptoot van f



1. Toon aan dat die vergelyking van f , $f(x) = 2(3)^{x+1} + 2$ is.
2. Bereken die y-koördinaat van die punt B.
3. Bepaal die gemiddelde gradiënt van die kurwe tussen punte A en B.

OPLOSSINGS

1.

$$q = 2$$
$$f(x) = 2 \cdot b^{x+1} + 2$$
$$20 = 2 \cdot b^{1+1} + 2$$
$$18 = 2 \cdot b^2$$
$$9 = b^2$$
$$b = 3$$
$$f(x) = 2 \cdot 3^{x+1} + 2$$

2.

$$y = 2 \cdot 3^{-1+1} + 2$$
$$y = 2 \cdot 1 + 2$$
$$y = 4$$

3.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{20 - 4}{1 - (-1)}$$
$$= 8$$

AFDELING 8: AKTIWITEITE VAN FUNKSIES EN GRAFIEKE

AKTIWITEIT 1

VRAAG 4

4.1 Gegee die funksie $p(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

4.1.1 Is p 'n stygende of dalende funksie? (1)

4.1.2 Bepaal p^{-1} , die inverse van p , in die vorm $y = \dots$ (2)

4.1.3 Skryf die definisieversameling van p^{-1} neer. (1)

4.1.4 Skryf die vergelyking van die asimptoot van $p(x) - 5$ neer. (1)

4.2 Gegee: $f(x) = \frac{4}{x-1} + 2$

4.2.1 Skryf die vergelyking van die asimptote van f neer. (2)

4.2.2 Bereken die x -afsnit van f . (2)

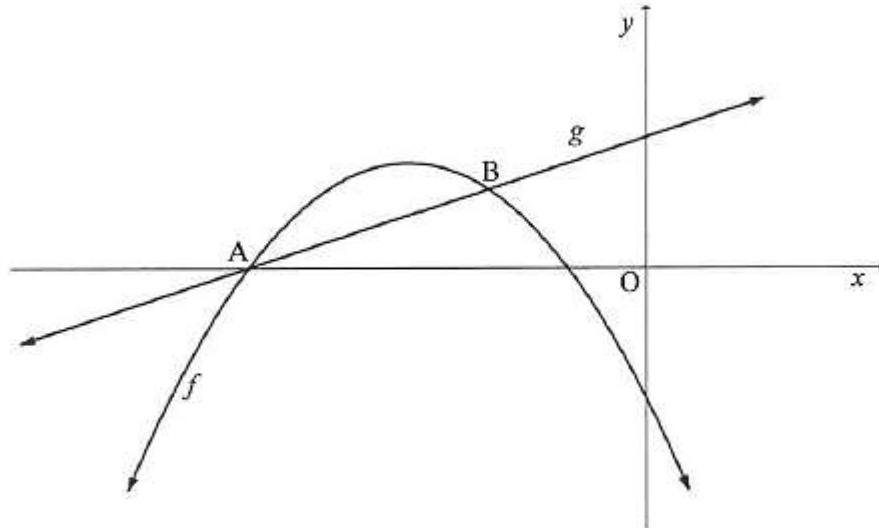
4.2.3 Teken die grafiek van f , en dui alle asimptote en die afsnitte met die asse aan. (4)

4.2.4 Gebruik jou grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor $\frac{4}{x-1} \geq -2$. (2)

4.2.5 Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as van $f(x-2)$, wat 'n negatiewe gradiënt het. (3)
[18]

VRAAG 5

Die grafieke van die funksies $f(x) = -(x+3)^2 + 4$ en $g(x) = x + 5$ is hieronder geteken. Die grafieke sny by A en B.



- 5.1 Skryf die koördinate van die draaipunt van f neer. (2)
- 5.2 Skryf die waardeversameling van f neer. (1)
- 5.3 Toon dat die x -koördinate van A en B onderskeidelik -5 en -2 is. (4)
- 5.4 Vervolgens, bepaal die waardes van c waarvoor die vergelyking $-(x+c+3)^2 + 4 = (x+c) + 5$ EEN negatiewe en EEN positiewe wortel het. (2)
- 5.5 Die maksimum afstand tussen f en g in die interval $x_A < x < x_B$ is k . Indien $h(x) = g(x) + k$, bepaal die vergelyking van h in die vorm $h(x) = \dots$ (5)
- [14]

AKTIWITEIT 2

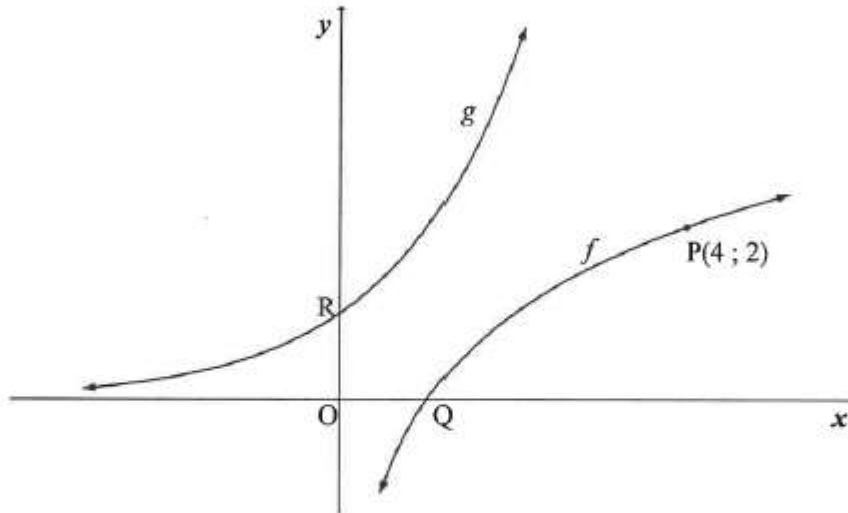
VRAAG 4

Gegee: $g(x) = \frac{1}{x-1} + 2$

- 4.1 Skryf die vergelykings van die asimptote van g neer. (2)
- 4.2 Teken 'n grafiek van g en dui enige afsnitte met die asse en asimptote aan. (4)
- 4.3 Bepaal die waardes van x waarvoor $g(x) > 0$. (2)
- 4.4 Bepaal die vergelyking van die simmetrie-as van g wat 'n negatiewe gradiënt het. (2)
- [10]

VRAAG 5

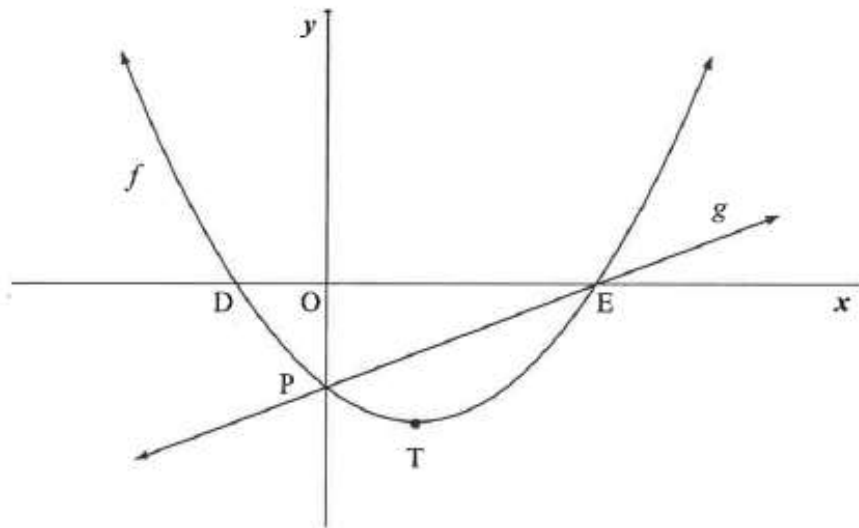
In die diagram is die grafieke van $f(x) = \log_a x$ en g geskets. Grafiek g is die refleksie van f in die lyn $y = x$. Grafiek f gaan deur die punt $P(4; 2)$. Q is die x -afsnit van f en R is die y -afsnit van g .



- 5.1 Skryf die koördinate van P' , die beeld van P op g , neer. (2)
 - 5.2 Toon dat $a = 2$. (2)
 - 5.3 Skryf die vergelyking van g in die vorm $y = \dots$ neer. (1)
 - 5.4 T is 'n punt op f in die eerste kwadrant, met TR ewewydig aan die x -as. Bereken die oppervlakte van $\triangle RTP'$. (4)
- [9]

VRAAG 6

Die grafieke van $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en $g(x) = mx + c$ is hieronder geskets. D en E is die x-afsnitte en P is die y-afsnit van f . Die draaipunt van f is $T(1; -4)$. Die grafieke van f en g sny mekaar by P en E.



- 6.1 Skryf die waardeversameling van f neer. (1)
 - 6.2 Bereken die koördinate van D en E. (3)
 - 6.3 Bepaal die vergelyking van g . (2)
 - 6.4 Skryf die waardes van x neer waarvoor $f(x) - g(x) > 0$. (2)
 - 6.5 Bepaal die maksimum vertikale afstand tussen h en g indien $h(x) = -f(x)$ vir $x \in [-2; 3]$. (5)
 - 6.6 Gegee: $k(x) = g(x) - n$.
Bepaal n indien k 'n raaklyn aan f is. (5)
- [18]

AKTIWITEIT 3

VRAAG 4

Gegee: $f(x) = a^x - 1$ vir $a > 0$. $B\left(2; \frac{-5}{9}\right)$ is 'n punt op f .

4.1 Bereken die waarde van a . (2)

4.2 Skryf die waardeversameling van f neer. (1)

4.3 Skets die grafiek van f . Dui die afsnitte met die asse en asimptote, indien enige, duidelik aan. (3)

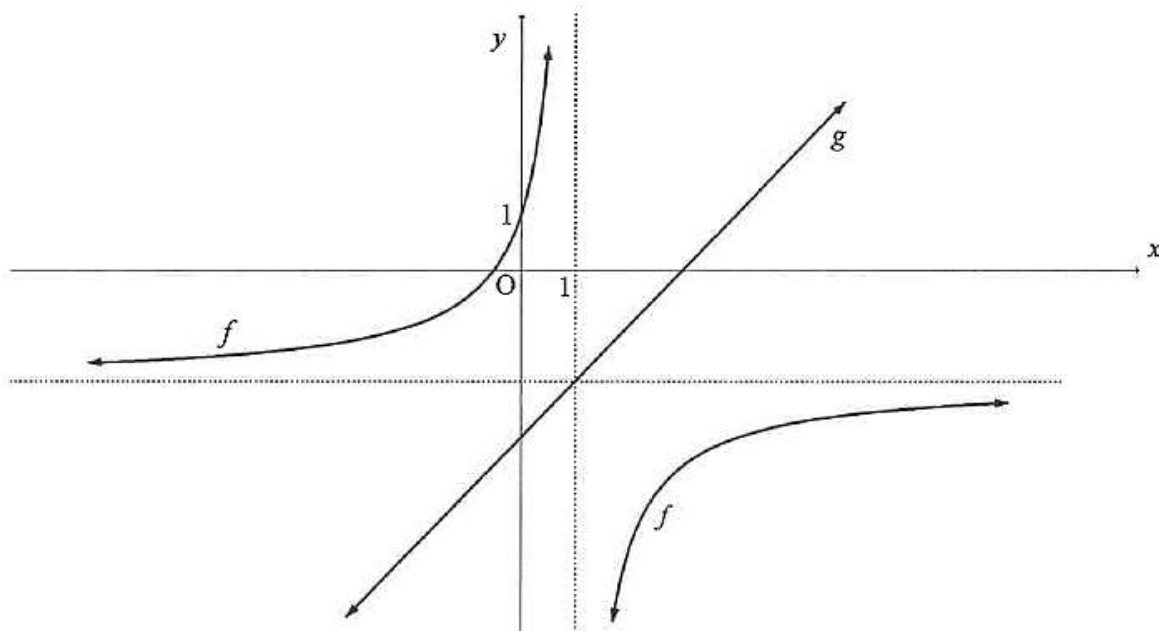
4.4 Daar word verder gegee dat C 'n punt op f is by $y = \frac{19}{8}$.

Bepaal die koördinate van C' , die beeld van C , wanneer C om die lyn $y = x$ gereflekteer word. (3)
[9]

VRAAG 5

Hieronder is die grafiek van $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$ geskets met die definisieversameling $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

Die grafiek van f sny die y -as by $(0; 1)$. 'n Simmetrielyn van f word deur $g(x) = x - 3$ gegee.



5.1 Skryf die waarde van p neer. (1)

5.2 Bepaal die vergelyking van die horisontale asimptoot van f . (2)

5.3 Bereken die waarde van a . (2)

5.4 Vir watter waardes van x is $f(x) \geq 0$? (3)

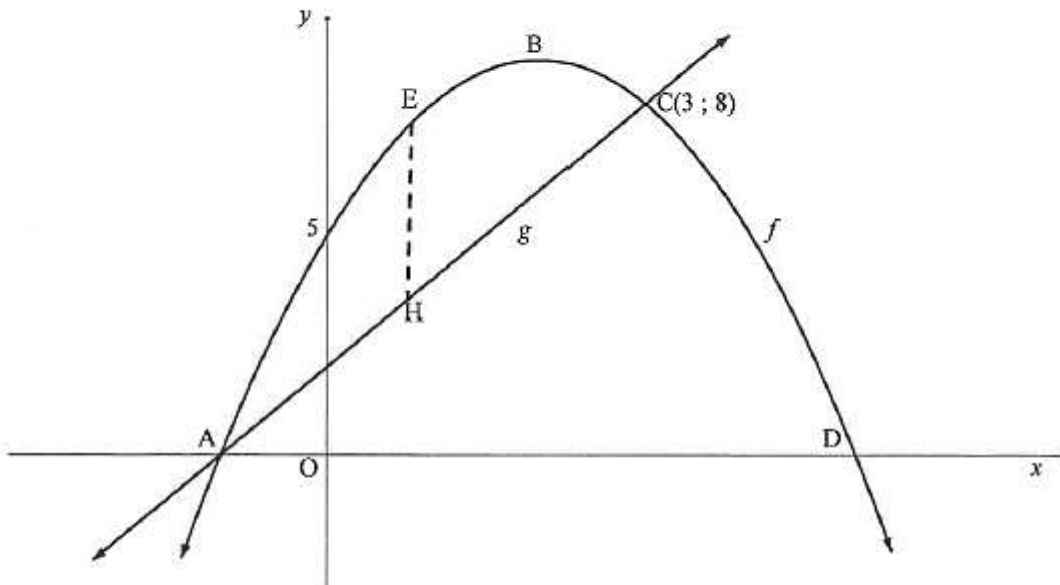
5.5 Grafiek f transformeer na h waar:

- Die definisie- en waardeversamelings van h dieselfde as dié van f is
- $h'(x)$, die afgeleide van h , negatief in die definisieversameling daarvan is

Beskryf 'n moontlike transformasie wat f kon ondergaan het om na h te lei. (2)
[10]

VRAAG 6

In die diagram hieronder is die grafieke van $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ en g , 'n reguitlyn, geskets. $C(3; 8)$ is 'n snypunt van f en g . EH is ewewydig aan die y -as getrek, met E 'n punt op f en H 'n punt op g .



6.1 Bereken die koördinate van B , die draaipunt van f . (3)

6.2 Toon dat die vergelyking van die lyn deur A en C deur $g(x) = 2x + 2$ gegee word. (3)

6.3 Bereken die maksimum lengte van EH vir $f > g$. (4)

6.4 Gegee: $k(x) = f(x + m) = -x^2 - 2mx - m^2 + 4x + 4m + 5$

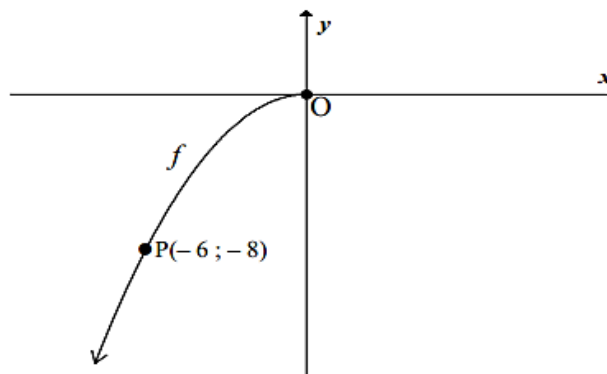
Bepaal die waarde van m sodat g 'n raaklyn aan k is. (5)
[15]

AKTIWITEIT 4

VRAAG 6

Die grafiek van $f(x) = ax^2$, $x \leq 0$ is hieronder geskets.

Die punt $P(-6; -8)$ lê op die grafiek van f .



- 6.1 Bereken die waarde van a . (2)
- 6.2 Bepaal die vergelyking van f^{-1} , in die vorm $y = \dots$ (3)
- 6.3 Write down the range of f^{-1} (1)
- 6.4 Teken die grafiek van f^{-1} , toon die koördinate van 'n punt op die grafiek anders as $(0; 0)$. (2)
- 6.5 Die grafiek van f is die refleksie van in die lyn $y = x$ en daarna word dit gereflekteer in die x -as. Bepaal die vergelyking van die nuwe funksie in die vorm $y = \dots$ (3)

[11]

BYLAAG A

INLICHTINGSBLAD

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$A = P(1 + ni)$$

$$A = P(1 - ni)$$

$$A = P(1 - i)^n$$

$$A = P(1 + i)^n$$

$$T_n = a + (n - 1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)d]$$

$$T_n = ar^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} ; \quad r \neq 1$$

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r} ; \quad -1 < r < 1$$

$$F = \frac{x[(1 + i)^n - 1]}{i}$$

$$P = \frac{x[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$y = mx + c$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \tan \theta$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\text{In } \triangle ABC: \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{area } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 1 - 2\sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$$

$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum (x - \bar{x})^2}$$

BYLAAG B

3. UITBREIDING VAN INHOUD/ONDERWERPE

Die doel van die verduideliking van die onderwerpe is om die onderwyser leiding te gee ten opsigte van die vlak en omvang van die onderwerpe wat vir eksamendoeleindes nodig is. Integrasie van onderwerpe word aangemoedig aangesien leerders Wiskunde as 'n holistiese dissipline moet sien. Dus kan vrae wat verskillende onderwerpe integreer, gevra word.

FUNKSIES

1. Kandidate moet in staat wees om funksie-notasie te gebruik en te interpreteer. In die onderrigproses moet leerders verstaan hoe $f(x)$ getransformeer moet word om $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x+a)$, $af(x)$ en $x=f(y)$, waar $a \in R$, te verkry.
2. Trigonometriese funksies sal SLEGS in VRAESTEL 2 voorkom.



BIBLIOGRAFIE

1	KABV Dokument
2	Eksamenriglyne
3	DBE November 2008 – 2024 Vraestelle
4	DBE Junie en Feb/Mar 2009 – 2024 Vraestelle
5	“Mind The Gap” Studiegids
6	Mind Action Series Handboek
7	JENN 2022 – 2024 Handleidings



JENN

Training and Consultancy

The path to enlightened education

VAK: WISKUNDE

GRAAD 12

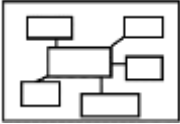
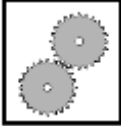
KWARTAAL 2

ONDERWYSER EN LEERDER INHOUDSHANDLEIDING

ONDERWERP

TRIGONOMETRIE

IKOON BESKRYWING

 BREINKAART	 EKSAMEN RIGLYN	 INHOUD	 AKTIWITEITE
 BIBLIOGRAFIE	 TERMINOLOGIE	 UITGEWERKTE VOORBEELDE	 STAPPE



INHOUD

BLADSY

<u>AFDELING 1:</u> ○ Eksamenriglyn en uitkomste ○ Diagnostiese verslag aanbevelings ○ Belangrike terme en definisies	4 – 6
<u>AFDELING 2: Trigonometriese Verhoudings, Cartesiesevlak en Identiteite</u> ○ Content and Worked examples. ○ Activities	7 – 26
<u>AFDELING 3: Reduksie Formules</u> ○ Inhoud en Uitgewerkte voorbeelde ○ Aktiwiteite	27 – 33
<u>AFDELING 4: Trigonometriese Funksies</u> ○ Inhoud en Uitgewerkte voorbeelde ○ Aktiwiteite	34 – 39
<u>AFDELING 5: Trigonometriese Vergelykings</u> ○ Inhoud en Uitgewerkte voorbeelde ○ Aktiwiteite	40 – 46
<u>AFDELING 6: Bibliografie</u>	47

AFDELING 1: BELEID



Beleidriglyne (uitkomste): TRIGONOMETRIE

A	B	C
(a) Definisie van die trigonometriese verhoudings $\sin\theta$, $\cos\theta$ en $\tan\theta$ in reghoekige driehoeke. (b) Brei die definisies van $\sin\theta$, $\cos\theta$ en $\tan\theta$ uit tot $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ (c) Lei af en gebruik waardes van die trigonometrieseverhoudings (sonder gebruik van 'n sakrekenaar vir die spesiale hoeke $\theta \in \{0^\circ; 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 90^\circ\}$) (d) Definieer die resiproke van die trigonometriese verhoudings.	(a) Lei af en gebruik die identiteite: $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ en $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ (b) Lei die reduksieformules af. (c) Bepaal die algemene oplossing en/of die spesifieke oplossings van trigonometriese vergelykings. (d) Bepaal die sinus, kosinus en area-reëls.	Bewys en gebruik die saamgestelde en dubbelhoekidentiteite.
Los probleme in tweedimensionele figure op.	Los probleme in tweedimensionele figure op.	Los probleme in twee- en driedimensionele figure op.

(BRON: KURRIKULUM EN ASSESSERING BELEIDSVERKLARING (KABV) VOO-fase GRAAD 10 – 12 WISKUNDE)

Konsepte en punte toekenning:

Konsep(te)	Graad	Punte
Trigonometrie : Oplossing van driehoeke en Identiteite	10,11 & 12	±12
Trigonometrie : Reduksie Formule en Vergelykings	10,11 & 12	±18
Trigonometrie : Grafieke	10 &11	±12
Trigonometrie : 2D en 3D	10,11 & 12	±8
TOTAAL		50

Diagnostieseverslag aanbevelings:

- Wanneer reghoekige driehoeke opgelos word, gebruik Stelling van Pythagoras om al die sye te bepaal sadat trigonometriese verhoudings toegepas kan word: x , y en r .
- Onderwyser moet verduidelik die reduksie van ko-funksies met betrekking tot die kwadrante.
- Algemene oplossing moet verduidelik word met gebruik van verwysingshoek om die waarde van die verlangde hoeke te vind. Verduidelik wanneer en hoekom die oplossing algemeen is en wanneer nie. .
- Onderrig moet analisering en interpretasie van grafieke beskou.
- Identifiseer driehoeke met 'n diagram() en klassifiseer as volg:
 - ✓ Reghoekige driehoeke – Trig verhoudings en Pythagoras
 - ✓ Oppervlaktereël – wanneer die woord “oppervlakte genoem word
 - ✓ cosinusreël – wanneer drie sye van 'n driehoek gegee word of twee sye met 'n ingeslote hoek
 - ✓ sinusreël – enige voorwaarde wat nie die cosinusreël bevredig nie.

T	Woord	Beskrywing / Definisie	Simbole / Formule
1	Reduksie Formules	Word gebruik om 'n hoek groter as 90^0 to verklein tot 'n skerphoek.	$90^0 \pm \theta$ $180^0 \pm \theta$ $360^0 \pm \theta$
2	Ko-funksie	Twee hoeke is komplementêr as hulle som gelyk aan 90^0 is.	$\sin \theta = \cos(90^0 - \theta)$ $\cos \theta = \sin(90^0 - \theta)$ $\sin(90^0 + \theta) = \cos \theta$ $\cos(90^0 + \theta) = -\sin \theta$
3	Trig-identiteit	Is 'n stelling van gelykheid met 'n linkerkant en kan bewys word deur sekere identiteite te gebruik wat van basiese trig-funksies afgelei word.	$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$
4	Beperking	'n Identiteit is waar vir alle waardes van 'n veranderlike behalwe vir daardie waardes waarvoor die identiteit nie gedefinieerd is of ongedefinieerd is	
5	Algemene Oplossing	Om alle hoeke te vind (ook groter as 360^0 en kleiner as 0^0) wat die vergelyking sal bevredig.	As dit die sinus- of cosinus-funksie is, tel by $k \cdot 360^0, k \in \mathbb{Z}$ en as dit 'n tan-funksie, tel by $k \cdot 180^0, k \in \mathbb{Z}$
6	Saamgestelde hoeke	Die trigonometriese identiteite $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A$ $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$	
7	Dubbelhoeke	Trigonometriese verhouding van $2 \times$ 'n hoek	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$ $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$ $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$
8	Periode	As 'n sinus, cosinus, of tan grafiek 'n volle siklus voltooi in 'n sekere interval, gemeet in grade.	sinus en cosinus grafieke: $\frac{360^0}{b}$
9	Amplitude	Dit is $\frac{1}{2}$ afstand tussen die maksimum en minimum y-waarde van die grafiek en is altyd 'n positiewe waarde.	

10	Oplossing van 'n driehoek	As 'n driehoek nie reghoekig is nie, kan enige sye en hoeke bepaal word deur die sinus-, cosinus- en oppervalktereëls. Die driehoek kan opgelos word indien 3 waardes gegee word. sinusreël: $s \ s \ \angle ; \angle \angle \ s$ cosinusreël: $s \ \angle \ s ; \ s \ s \ s$ oppervlaktereël: $s \ \angle \ s$	Sinusreël: $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ Cosinusreël: $b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos A$ Oppervlaktereël: $\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2}ab \sin C$
----	---------------------------	--	---

AFDELING 2: Trigonometriese Verhoudings, Cartesiesevlak en Identiteite



Trigonometriese Verhoudings en Identiteite

Inhoud en uitgewerkte voorbeelde:

Daar is drie spesiale verhoudings in die studie van Trigonometrie, naamlik sinus, cosinus en tan-verhoudings. Hierdie verhoudings word op reghoekige driehoeke toegepas. Hulle verteenwoordig die verhouding tussen die sye en hoeke.

Ons kan sinus, cosinus en tan soos volg definieer.

1.

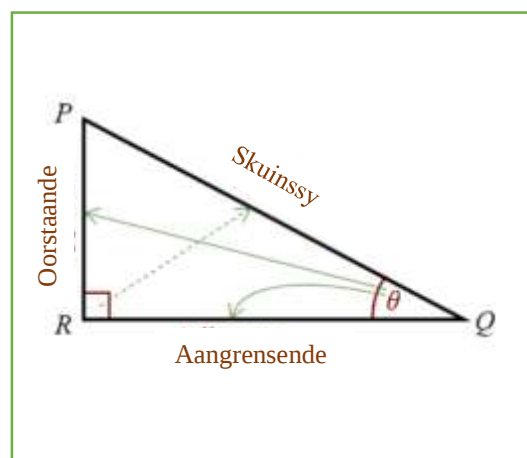
$$\text{Sinus van 'n hoek } \theta = \frac{\text{lengte van die oorstaande sy}}{\text{lengte van die skuinssy}}$$
$$\therefore \sin \theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{skuinssy}}$$

2.

$$\text{Cosinus van 'n hoek } \theta = \frac{\text{lengte van die aangrensende sy}}{\text{lengte van die skuinssy}}$$
$$\therefore \cos \theta = \frac{\text{aangrensend}}{\text{skuinssy}}$$

3.

$$\text{Tan van 'n hoek } \theta = \frac{\text{lengte van die oorstaande sy}}{\text{lengte van die aangrensende sy}}$$
$$\therefore \tan \theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{aangrensende}}$$



Reghoekige driehoeke

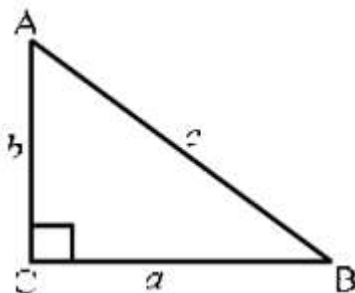
Hierdie driehoeke is fundamenteel tot die study van trigonometrie. In vroeër grade was jy aan die Stelling van Pythagoras voorgestel, wat die verhouding tussen die dries ye van 'n reghoekige driehoek beskryf.

Vanaf die Stelling van Pythagoras:

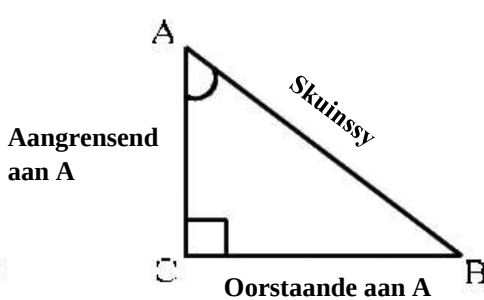
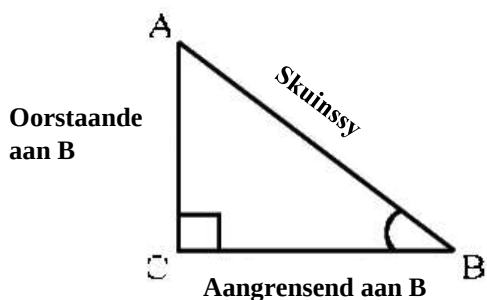
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

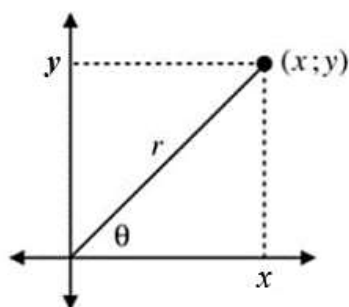


Verder, is die byskrifte van die drie sye – **aangrensend**, **oorstaande** en **skuinssy**. Die langste sy (teenoor die regtehoek) word die skuinssy genoem. Die oorstaande en aangrensende sye is afhanklik van watter hoek as verwysingshoek gebruik word.



Cartesiese vlak

In 'n cartesiese vlak word die Trigonometriese verhoudings soos volg gedefinieer:



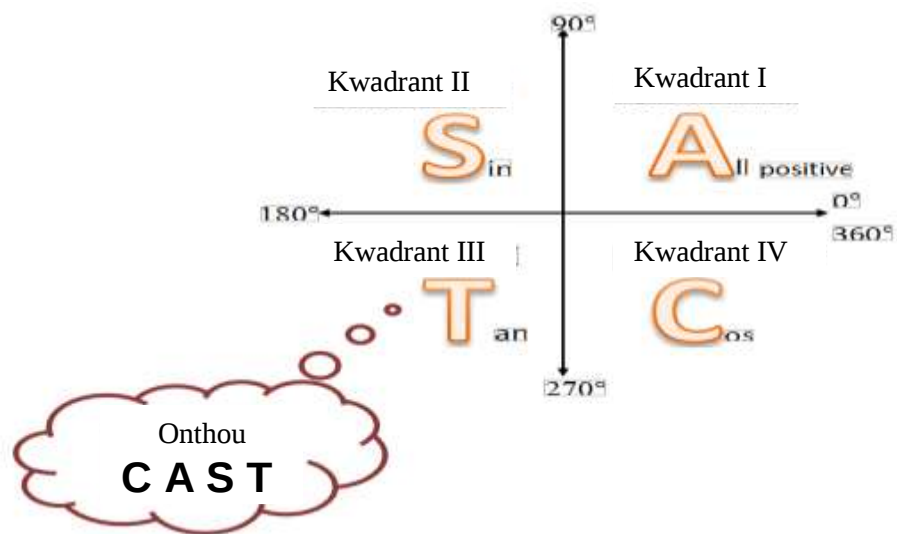
$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Die hoek wat gevorm word sal die teken van elke trigonometriese funksie in daardie kwadrant bepaal.

- Alle trigonometriese funksies is positief in die eerste kwadrant.
- $\sin \theta$ is positief in die tweede kwadrant en $\tan \theta$ en $\cos \theta$ is negatief.
- $\tan \theta$ is positief in die derde kwadrant en $\sin \theta$ en $\cos \theta$ is negatief.
- $\cos \theta$ is positief in die vierde kwadrant en $\sin \theta$ en $\tan \theta$ is negatief.



Die volgende diagramme sal ons wys hoe om ons reghoekige driehoeke in die verskillende kwadrante te teken.

1 ^{ste} Kwadrant	2 ^{de} Kwadrant
3 ^{de} Kwadrant	4 ^{de} Kwadrant

Uitgewerkte voorbeeld 1

Bepaal die kwadrant wat die volgende voorwaardes bevredig en teken die akkurate driehoek.

- $\sin \theta < 0$ en $90^\circ < \theta < 270^\circ$.
- $\cos \theta > 0$ en $\tan \theta < 0$
- $7 \tan \theta + 3 = 0$ en $\theta \in [90^\circ; 270^\circ]$

Oplossings

- $\sin \theta < 0$ en $90^\circ < \theta < 270^\circ$.

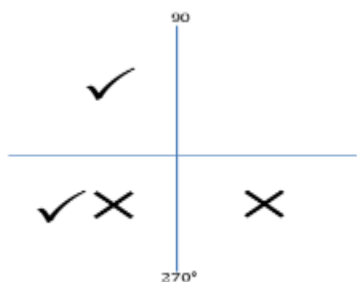
Stap 1:

→ gebruik voorwaardes om die kwadrante te identifiseer en merk die met verskillende simbole op die Cartesiese vlak.

Sin is negatief in die 3^{de} en 4^{de} kwadrante.

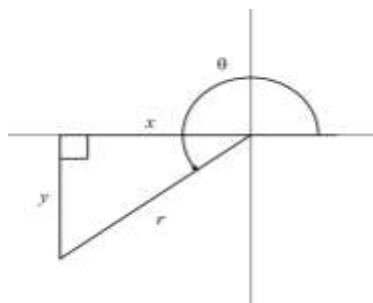
Hierdie interval verteenwoordig die 2^{de} en 3^{de} kwadrante

Gegee dat $\sin \theta < 0$ en $90^\circ < \theta < 270^\circ$.



Waar X die kwadrant voorstel, wat ons van sin kon aflei en die ✓ is vanaf die interval. Ons kan sien dat in die 3^{de} kwadrant beide voorwaardes bevredig word, vervolgens is die terminale arm in die 3^{de} kwadrant.

→ Voltooi die reghoekige driehoek.

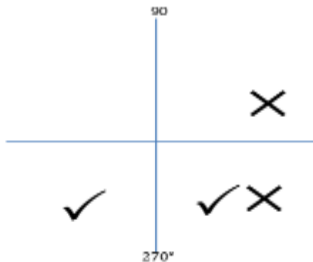


b. $\cos \theta > 0$ en $\tan \theta < 0$

cos is positief in die 1^{ste} en die 4^{de} kwadrante.

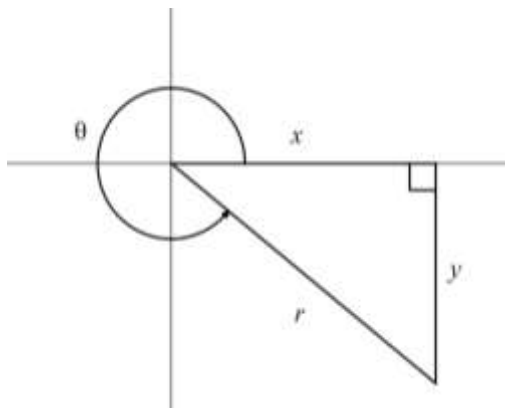
tan is negatief in die 2^{de} en die 4^{de} kwadrante

Gegee dat $\cos \theta > 0$ en $\tan \theta < 0$.



Waar X die kwadrante voorstel wat ons vanaf $\cos$ verkry en die ✓ die kwadrante voorstel wat ons vanaf $\tan$ verkry. Ons neem waar dat die 4^{de} kwadrant beide voorwaardes bevredig, vervolgens sal die terminale arm in die 4^{de} kwadrant wees.

⇒ Voltooi die reghoekige driehoek.



c. $7 \tan \theta + 3 = 0$ and $\theta \in [90^\circ: 270^\circ]$

Antwoord:

Die eerste stap is om die eerste vergelyking te vereenvoudig sodat die trig. verhouding ($\tan \theta$) alleen op die linkerkant is.

$$7 \tan \theta + 3 = 0$$

$$7 \tan \theta = -3$$

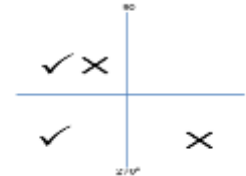
$$\tan \theta = \frac{-3}{7}$$

⇒ Gebruik voorwaardes om die kwadrante te identifiseer en merk met verskillende simbole op die Cartesiese vlak.

tan is negatief in die 2^{de} en 4^{de} kwadrante.

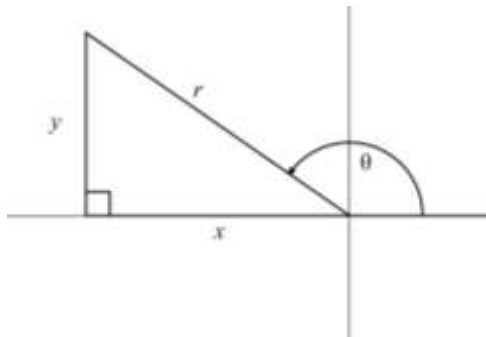
Hierdie interval stel die 2^{de} en 3^{de} kwadrante voor

Gegee dat $\tan \theta = \frac{-3}{7}$ en $\theta \in [90^\circ; 270^\circ]$,



Waar X die kwadrante voorstel wat ons van tan verkry het en die ✓ die kwadrante voorstel wat ons van die interval verkry. Ons sien dat die 2^{de} kwadrant beide voorwaardes bevredig, vervolgens sal die terminale arm in die 2^{de} kwadrant wees.

➔ Voltooi die reghoekige driehoek.



Vir sommige trigonometriese probleme, is dit nuttig om 'n skets te teken en die betrokke hoek en die x , y en r waardes aan te dui. Dit is raadsaam om al die waardes van x , y en r te vind voordat die trigonometriese probleme, wat die reghoekige driehoek sal benodig, opgelos word.

$x^2 + y^2 = r^2$; waar r dienskuinssy is.

Onthou die Skuinssy is altyd positief, en vir die waardes van x en y , hulle kan positief of negatief wees, afhangend van die kwadrant waaring jy werk.

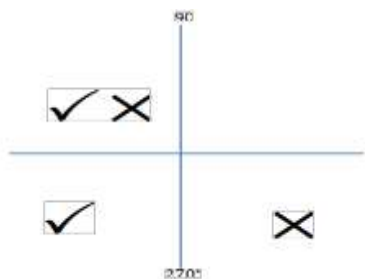
Uitgewerkte Voorbeeld 2

Gegee dat: $\sin \theta = \frac{3}{5}$, en $\theta \in [90^\circ; 360^\circ]$, vind die waarde van die volgende **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**.

Oplossings:

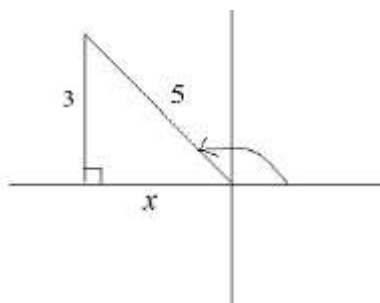
Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar – Dit beteken jy moet die waardes van die DRIEHOEK gebruik.





Ons gaan die driehoek in die 2^{de} kwadrant teken.

$$\sin \theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{skuinssy}} = \frac{3}{5} = \frac{y}{r},$$



In die driehoek hierbo, het ons nie die waarde van x nie. Ons bereken dit deur die **Stelling van Pythagoras** te gebruik:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + (3)^2 = (5)^2$$

$$x^2 + 9 = 25$$

$$x^2 = 25 - 9$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

$x = -4$, omdat die x waarde in die 2^{de} kwadrant negatief is.

Ons kan die volgende vrae beantwoord deur die driehoek hierbo te gebruik.

- $\cos \theta$
- $\tan(180^\circ - \theta)$
- $\sin(-\theta)$
- $\sin(\theta - 180^\circ)$
- $\cos(450^\circ + 2\theta)$
- $\sin(45^\circ - \theta)$

Oplossings :

$$\text{a. } \cos \theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{skuinssy}}$$

$$= \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{b. } \tan(180^\circ - \theta)$$

$$= -\tan \theta = \frac{\text{oorstaande}}{\text{aangrensend}}$$

$$= -\left(\frac{3}{-4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\text{c. } \sin(-\theta)$$

$$= -\sin \theta$$

$$= -\frac{3}{5}$$

$$\text{d. } \sin(\theta - 180^\circ)$$

$$= \sin(-180^\circ + \theta)$$

$$= \sin[-(180^\circ - \theta)]$$

$$= -\sin(180^\circ - \theta)$$

$$= -\sin \theta$$

$$= -\frac{3}{5}$$

$$\text{e. } \cos(450^\circ + 2\theta)$$

$$= \cos(450^\circ - 360^\circ + 2\theta)$$

$$= \cos(90^\circ + 2\theta)$$

$$= -\sin 2\theta$$

$$= -2\sin\theta \cdot \cos\theta$$

$$= -2\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{24}{25}$$

$$\text{f. } \sin(45^\circ - \theta)$$

$$= \sin(45^\circ - \theta)$$

$$= \sin 45^\circ \cdot \cos \theta^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin \theta^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{4}{5\sqrt{2}} - \frac{3}{5\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Uitgewerkte voorbeeld 3

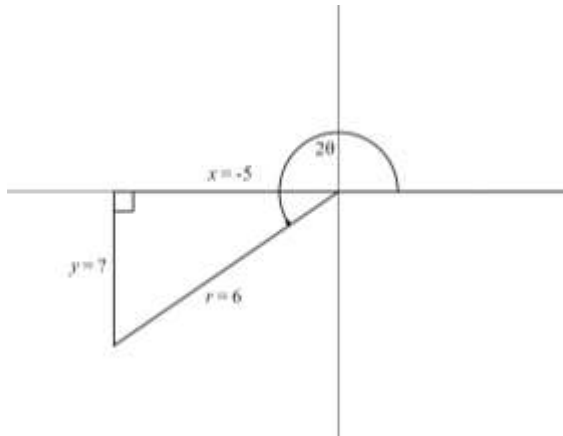
As $\cos 2\theta = -\frac{5}{6}$, waar $2\theta \in [180^\circ; 270^\circ]$, bereken sonder die gebruik van 'n sakrekenaar die waardes in eenvoudigste vorm:

1. $\sin 2\theta$

2. $\sin^2 \theta$

Oplossings

2θ is in die 3^{de} kwadrant omdat $\cos$ negatief is, en die interval stel die 3^{de} kwadrant voor.



Voordat on die vrae kan beantwoord, kan ons sien dat ons in die driehoek nie die y-waarde het nie.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$(-5)^2 + y^2 = (6)^2$$

$$y^2 = 36 - 25$$

$$y^2 = 11$$

$$y = \pm\sqrt{11}$$

$$y = -\sqrt{11}, \text{ omdat die } y \text{ waarde in die 3^{de} kwadrant negatief is.}$$

a. $\sin 2\theta = \frac{-\sqrt{11}}{6}$

b. $\cos 2\theta = -\frac{5}{6}$

$$-\frac{5}{6} = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$2 \sin^2 \theta = 1 + \frac{5}{6}$$

$$2 \sin^2 \theta = \frac{11}{6}$$

$$\sin^2 \theta = \frac{11}{6} \div 2$$

$$\sin^2 \theta = \frac{11}{12}$$

Uitgewerkte Voorbeeld 4

As $\cos 42^\circ = p$ vind die waarde van die volgende in terme van p .

- Bereken die waarde van x , y en r .
- Toon al die hoeke in die driehoek
- $\sin 42^\circ$
- $\cos 138^\circ$
- $\tan 312^\circ$
- $\sin 132^\circ$
- $\cos (-48^\circ)$
- $\sin 84^\circ$
- $\sin 402^\circ$
- $\cos 768^\circ$
- $2 \sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ$
- $\cos^2 24^\circ - \sin^2 24^\circ$
- $1 - 2\sin^2 24^\circ$
- $\sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ$
- $\cos 21^\circ$
- $\sin 21^\circ$

Oplossings :

a. $\sin 42^\circ = \frac{p}{1} = \frac{y}{r}$

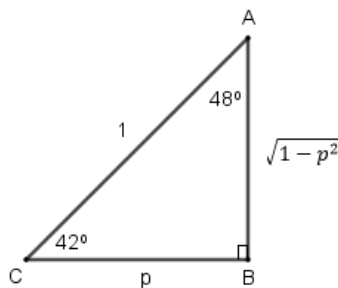
$$x^2 + p^2 = 1^2$$

$$x^2 = 1 - p^2$$

$$x = \pm\sqrt{1 - p^2}$$

$$x = -\sqrt{1 - p^2}$$

b.



c. $\sin 42^\circ$

$$= \frac{\sqrt{1-p^2}}{1}$$

$$= \sqrt{1 - p^2}$$

d. $\cos 138^\circ$

$$= \cos (180 - 42^\circ)$$

$$= -\cos 42^\circ$$

$$= -p$$

e. $\tan 312^\circ$

$$= \tan (360^\circ - 48^\circ)$$

$$= -\tan 48^\circ$$

$$= -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \quad (\text{Rasionaliseer})$$

$$= \frac{-p}{\sqrt{1-p^2}} \times \frac{\sqrt{1-p^2}}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$= \frac{-p\sqrt{1-p^2}}{1-p^2}$$

f. $\sin 132^\circ$

$$= \sin (180^\circ - 48^\circ)$$

$$= \sin 48^\circ$$

$$= p$$

g. $\cos (-48^\circ)$

$$= \cos 48^\circ$$

$$= \sqrt{1-p^2}$$

h. $\sin 84^\circ$

$$= \sin 2 (42^\circ)$$

$$= 2\sin 42 \cos 42^\circ$$

$$= 2 \cdot \sqrt{1-p^2} \cdot p$$

$$= 2p \cdot \sqrt{1-p^2}$$

i. $\sin 402^\circ$

$$= \sin (402^\circ - 360^\circ)$$

$$= \sin 42^\circ$$

$$= \sqrt{1-p^2}$$

j. $\cos 768^\circ$

$$= \cos (768^\circ - 360^\circ - 360^\circ)$$

$$= \cos 48^\circ$$

$$= \sqrt{1-p^2}$$

$$k. \quad 2 \sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ$$

$$= \sin 2(21^\circ)$$

$$= \sin 42^\circ$$

$$= \sqrt{1 - p^2}$$

$$l. \quad \cos^2 24^\circ - \sin^2 24^\circ$$

$$= \cos 2(24^\circ)$$

$$= \cos 48^\circ$$

$$= \sqrt{1 - p^2}$$

$$m. \quad 1 - 2\sin^2 21^\circ$$

$$= \cos 2(21^\circ)$$

$$= \cos 42^\circ$$

$$= p$$

$$n. \quad \sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 2 \sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ\right) \quad \text{Onthou: } \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2(21^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 42^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1 - p^2}$$

$$o. \quad \cos 21^\circ$$

$$\cos 42^\circ = \cos 2(21^\circ) = 2\cos^2 21^\circ - 1$$

$$p = 2\cos^2 21^\circ - 1$$

$$p + 1 = 2\cos^2 21^\circ$$

$$\frac{1}{2}(p + 1) = \cos^2 21^\circ$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(p + 1)} = \cos 21^\circ$$

$$p. \quad \sin 21^\circ$$

$$\cos 42^\circ = \cos 2(21^\circ) = 1 - 2\sin^2 21^\circ$$

$$p = 1 - 2\sin^2 21^\circ$$

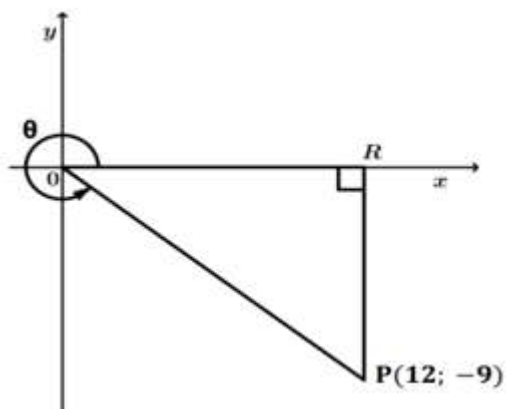
$$2\sin^2 21^\circ = 1 - p$$

$$\sin^2 21^\circ = \frac{1}{2}(1 - p)$$

$$\sin 21^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - p)}$$

Uitgewerkte Voorbeeld 5

5.1 In die diagram hieronder, is $P(12; -9)$ 'n punt in die Cartesiese vlak. Inspringendehoek $\hat{R}OP$ is gelyk aan θ .



Bereken, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar, die:

5.1.1 Lengte van OP

5.1.2 Die waarde van:

(a) $\cos(90^\circ - \theta)$

(b) $\sin(\theta + 30^\circ)$

Oplossings :

5.1.1	$OP = \sqrt{144 + 81}$ $= \sqrt{225}$ $= 15$
5.1.2 (a)	$\sin \theta = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5}$
5.1.2 (b)	$\sin(\theta + 30^\circ) = \sin \theta \cos 30^\circ + \cos \theta \sin 30^\circ$ $= \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{12}{15}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ $= -\frac{3\sqrt{3}}{10} + \frac{6}{15}$ $= \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$

Trigonometriese Identiteite

Trigonometriese Identiteit – 'n Gelykheid wat waar is vir alle waardes van 'n onbekende veranderlike, waarvoor beide kante van die identiteit gedefinieerd is (so geen nul noemers nie). Dit verskil van 'n trigonometriese vergelyking wat waar is net vir sekere waardes van die onbekende veranderlike.

Om 'n identiteit te bewys, moet jy bewys dat LK = RK

a) Vierkants Identiteit

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

b) Kwosiënt Identiteit

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$\tan(\theta + \alpha) = \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\cos(\theta + \alpha)}$$

Uitgewerkte Voorbeeld 1

Vereenvoudig die uitdrukking, deur vorige identiteite te gebruik:

a. $(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)$

b. $\cos^2 \theta - 1$

c. $\tan^2 \theta - \tan^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$

Oplossings:

(a) $(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)$

$$= 1 - \sin^2 \theta$$

$$= \cos^2 \theta$$

Gebruik die identiteit: $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$

(Use the identity $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$)

Vanaf $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ kan ons aflei

(b) $\cos^2 \theta - 1 = -\sin^2 \theta$ (By manipulating $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ we can deduce this) OR

$$\cos^2 \theta - 1 = -(1 - \cos^2 \theta)$$

$$= -\sin^2 \theta$$

Factorise (or Change of sign rule)

Use the identity: $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

Faktoriseer (of verander teken reël)

Gebruik die identiteit:

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$$

(c) $\tan^2 \theta - \tan^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$
 $= \tan^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} (\cos^2 \theta)$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \left(\frac{\cos^2 \theta}{1} \right)$$

$$= \sin^2 \theta$$

Factorise by taking out the HCF

If $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ then $\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$

Faktoriseer deur GGF uit te haal

As $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ dan is $\tan^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}$

c) Saamgestelde Hoeke

Wanneer twee hoeke bymekaar getel of van mekaar afgetrek word om 'n nuwe hoek te vorm, dan word 'n **Saamgesteldehoek** of 'n **dubbelhoek** gevorm.

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

Om die ander formules af te lei word die formule vir $\cos(\alpha - \beta)$ gebruik.

Afleiding van $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta)$$

$$\text{maar, } \cos(-\beta) = \cos\beta \text{ and } \sin(-\beta) = -\sin\beta$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Afleiding van $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(90^\circ - (\alpha + \beta))$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos((90^\circ - \alpha) - \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \cos\beta + \sin(90^\circ - \alpha) \sin\beta$$

$$\text{but } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \text{ and } \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Afleiding van $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta))$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos\alpha \cdot \sin(-\beta)$$

$$\text{but } \cos(-\beta) = \cos\beta \text{ and } \sin(-\beta) = -\sin\beta$$

$$\therefore \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Uitgewerkte Voorbeeld 2

- Vind die waarde van $\sin (45^\circ + 30^\circ)$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.
- Brei die volgende uit deur die saamgestelde hoek formule te gebruik : $\cos(60^\circ - A)$.
- Vind die waarde van $\cos 15^\circ$ sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

Oplossings:

a. $\sin (30^\circ + 45^\circ)$

$$= \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

b. $\cos(60^\circ - A)$.

$$= \cos A \cdot \cos 60^\circ + \sin A \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \cos A \cdot \frac{1}{2} + \sin A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\cos A + \sqrt{3} \sin A)$$

c. $\sin 15^\circ$

$$= \sin (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Uitgewerkte Voorbeeld 3

Vereenvoudig sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

- $\cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ$
- $\sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \cdot \sin 40^\circ$
- $\cos 50^\circ \cos 40^\circ - \sin 50^\circ \sin 40^\circ$
- $\cos 3\beta \cdot \cos \beta + \sin 3\beta \cdot \sin \beta$
- $\cos 3\theta \cdot \sin \theta + \sin 3\theta \cdot \cos \theta$
- $\sin 10^\circ \sin 20^\circ - \cos 20^\circ \cos 10^\circ$

Oplossings

$$\begin{aligned} a. \quad & \cos 70^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ \\ &= \cos 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 70^\circ \sin 10^\circ \\ &= \cos(70^\circ - 10^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b. \quad & \sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ \\ &= \sin(20^\circ + 40^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c. \quad & \cos 50^\circ \cos 40^\circ - \sin 50^\circ \sin 40^\circ \\ &= \cos(50^\circ + 40^\circ) \\ &= \cos 90^\circ \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d. \quad & \cos 3\beta \cdot \cos \beta + \sin 3\beta \cdot \sin \beta \\ &= \cos(3\beta - \beta) \\ &= \cos 2\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e. \quad & \sin \theta \cos 3\theta + \cos \theta \sin 3\theta \\ &= \sin(\theta - 3\theta) \\ &= \sin(-2\theta) \\ &= -\sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f. \quad & \sin 20^\circ \cdot \sin 10^\circ - \cos 20^\circ \cdot \cos 10^\circ \\ &= -\cos 20^\circ \cos 10^\circ + \sin 20^\circ \sin 10^\circ \\ &= -(\cos 20^\circ \cos 10^\circ - \sin 20^\circ \sin 10^\circ) \\ &= -\cos(20^\circ + 10^\circ) \\ &= -\cos 30^\circ \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

D) Dubbelhoeke

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \\ &= 2 \cos^2 A - 1\end{aligned}$$

Die dubbelhoek identiteite
word afgelei van die feit dat
 $2\theta = \theta + \theta$

Afleiding van $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \sin(\theta + \theta) \\ &= \sin \theta \cdot \cos \theta + \cos \theta \cdot \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

Afleiding van $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos(\theta + \theta) \\ &= \cos \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot \sin \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta\end{aligned}$$

Afleiding van $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos(\theta + \theta) \\ &= \cos \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot \sin \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) \\ &= 2 \cos^2 \theta - 1\end{aligned}$$

Afleiding van $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos(\theta + \theta) \\ &= \cos \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta \cdot \sin \theta \\ &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 1 - \sin^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta\end{aligned}$$

Uitgewerkte Voorbeeld 4

1. Gebruik die **dubbelhoek formules van sinus** om die volgende uit te brei.

- (a) $\sin 6\beta$
- (b) $\sin 70^\circ$
- (c) $\sin 10\theta$

2. Gebruik die **dubbelhoek formules van co-sinus** om die volgende uit te brei.:

- (a) $\cos 14\beta$
- (b) $\cos 50^\circ$
- (c) $\cos 3\theta$

Oplossings:

$$\begin{aligned}1. (a) \quad & \sin 6\beta \\&= \sin[2 (3\beta)] \\&= 2 \sin 3\beta \cdot \cos 3\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \quad & \sin 70 \\&= \sin[2 (35^\circ)] \\&= 2 \sin 35^\circ \cdot \cos 35^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c) \quad & \sin 8\theta \\&= \sin[2 (4\theta)] \\&= 2 \sin 4\theta \cdot \cos 4\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2. (a) \quad & \cos 14\beta \\&= \cos [2 (7\beta)] \\&= \cos^2 7\beta - \sin^2 7\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \quad & \cos 50^\circ \\&= \cos [2 (25)] \\&= 2\cos^2 25 - 1\end{aligned}$$

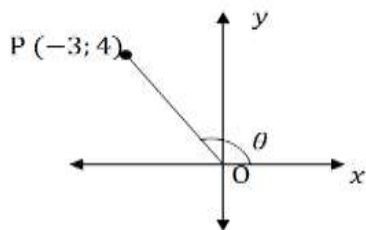
$$\begin{aligned}(c) \quad & \cos 3\theta \\&= \cos \left[2 \left(\frac{3}{2}\theta\right)\right] \\&= 1 - 2\sin^2 \left(\frac{3}{2}\theta\right)\end{aligned}$$

$$NB: 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

AKTIWITEITE



1. Gebruik die volgende diagram om die volgende vrae hieronder te beantwoord.



- 1.1 Die lengte van OP.
 - 1.2 $\tan \theta$
 - 1.3 $\sin(180^\circ - \theta)$
 - 1.4 $\cos(180^\circ + \theta)$
 - 1.5 $\sin 2\theta$
 - 1.6 $\cos 2\theta$
 - 1.7 $\sin(30^\circ + \theta)$
 - 1.8 $\cos(45^\circ - \theta)$
2. As $5\cos x = 4$ en $x \in [90^\circ; 360^\circ]$, bepaal die waarde van $3\sin 2x$, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.
3. As $13\cos A = 5$ en $\tan B = \frac{3}{4}$, $A \in [0^\circ; 270^\circ]$ en $B \in [0^\circ; 180^\circ]$.
Bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar,:
- 3.1 $\sin A$
 - 3.2 $\sin(A + B)$
4. 3 As $\sin 27^\circ = m$, druk elk van die volgende in terme van q uit.
- 4.1 $\sin 117^\circ$
 - 4.2 $\tan(-27^\circ)$
 - 4.3 $\cos^2 63^\circ$
 - 4.4 $\sin 72^\circ$
 - 4.5 $\cos 54^\circ$
5. Gegee $\sin 34^\circ = p$, vind die waarde van $\sin 17^\circ \cos 17^\circ$ in terme van p .
6. As $\cos 73^\circ \cos 31^\circ + \sin 73^\circ \sin 31^\circ = \rho$, bepaal die waarde van $\cos^2 21^\circ - \sin^2 21^\circ + 7$.

AFDELING 3: Reduksie Formule



Reduksie formule

Inhoud en uitgewerkte voorbeelde:

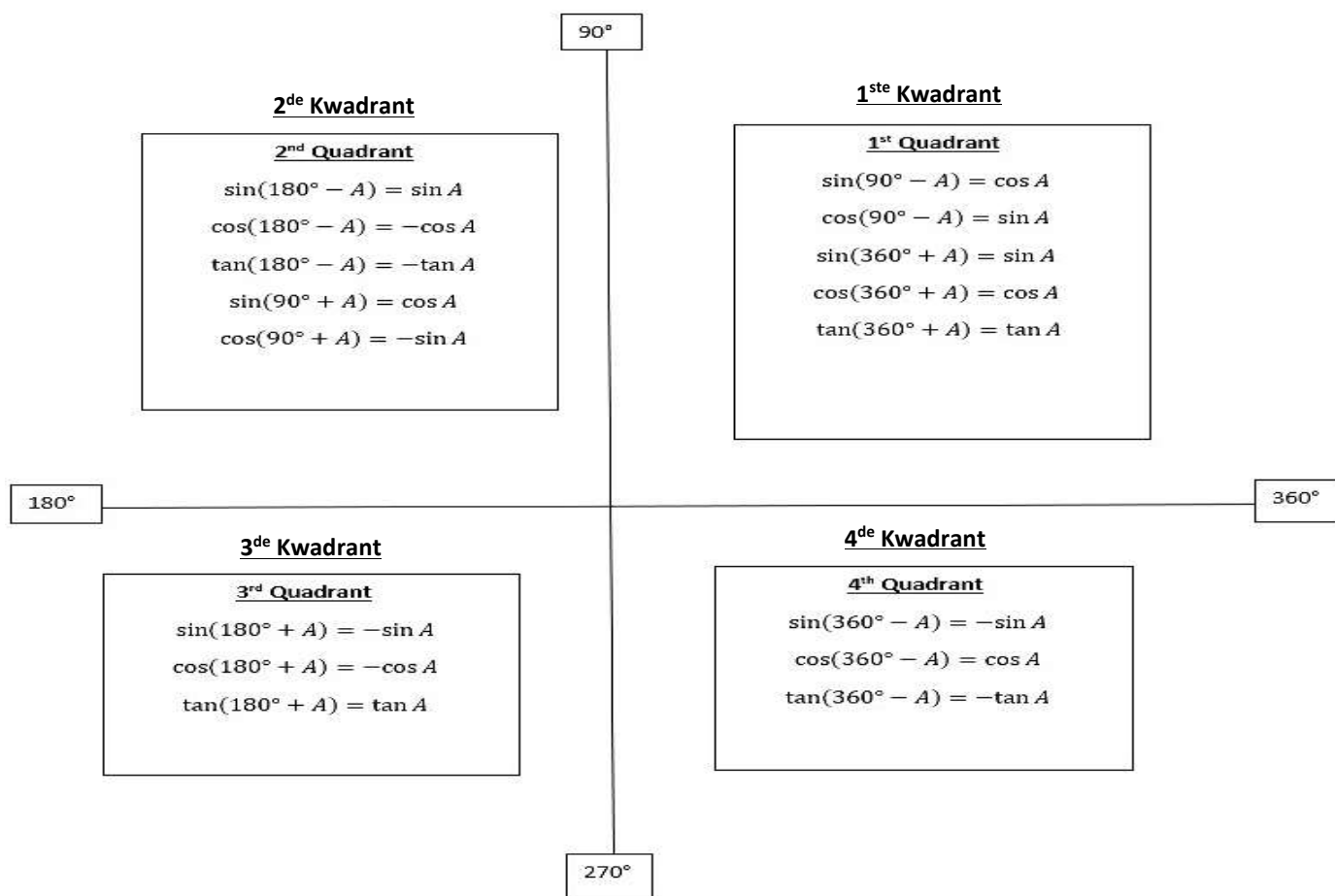
Reduksie formules word gebruik om die trigonometriese verhouding van enige hoek te herlei na 'n trigonometriese verhouding van 'n skerphoek.

Benadering om oefeninge te vereenvoudig:

- ✓ Identifiseer die kwadrant waar die hoek lê.
- ✓ As jy die reduksie formule van $(90^\circ \pm \theta)$ gebruik, onthou om na ko-funksie te verander.
- ✓ Skryf die korrekte trig. verhouding met die skerphoek neer.
- ✓ Neem **een faktor op 'n keer** en maak sin/vereenvoudig dit.

Nota:

- Hoeke groter as (360°)
- Negatiewe hoeke
- Komplementêre hoeke



Uitgewerkte Voorbeeld 1

Vereenvoudig volledig, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

- a. $\frac{\cos(180^\circ + \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)}$
- b. $\tan(90 + \theta) \cdot \sin(180 + \theta)$
- c. $\sin 120^\circ$
- d. $\cos 260^\circ$
- e. $\frac{\tan(180^\circ - \theta) \cdot \sin(360^\circ + \theta)}{\tan(360^\circ + \theta)}$
- f. $\frac{\cos(360^\circ - x) \cdot \sin(180^\circ + x)}{\cos(180^\circ + x)}$

Oplossing :

- a. $\frac{\cos(180^\circ + \theta)}{\cos(180^\circ - \theta)}$
 $= \frac{\cos(\theta)}{-\cos(\theta)}$ (In 3^{de} kwadrant en cosinus is negatief en 2^{de} kwadrant en cosinus is negatief in die 2^{de})
 $= -1$
- b. $\tan(90 + \theta) \cdot \sin(180 + \theta)$
 $= \frac{\sin(90 + \theta)}{\cos(90 + \theta)} \times -\sin(\theta)$ (Verander $\tan$ na $\frac{\sin}{\cos}$)
 $= \frac{\cos(\theta)}{-\sin(\theta)} \times -\sin(\theta)$
 $= \cos(\theta)$
- c. $\sin 120^\circ$
 $= \sin(180^\circ - 60^\circ)$ (Herlei stomphoek na skerphoek)
 $= \sin 60^\circ$
 $= \frac{\sqrt{3}}{2}$
- d. $\cos 260^\circ$
 $= \cos(180^\circ + 80^\circ)$ (Herlei stomphoek na skerphoek)
 $= -\cos 80^\circ$

$$\begin{aligned}
 \text{e. } & \frac{\tan(180^\circ - \theta) \cdot \sin(360^\circ + \theta)}{\tan(360^\circ + \theta)} \\
 & \frac{\overset{3^{\text{rd}}}{\tan(180^\circ - \theta)} \cdot \overset{4^{\text{th}}}{\sin(360^\circ + \theta)}}{\underset{4^{\text{th}}}{\tan(360^\circ + \theta)}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(-\tan \theta)(+\sin \theta)}{\tan \theta}$$

(Vereenvoudig)

$$= -\sin \theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{f. } & \frac{\cos(360^\circ - x) \cdot \sin(180^\circ + x)}{\cos(180^\circ + x)} \\
 & = \frac{(+\cos(x)) \cdot (-\sin(x))}{(-\cos(x))} \\
 & = \frac{-\sin(x)}{-1} \\
 & = \sin(x)
 \end{aligned}$$

Uitgewerkte Voorbeeld 2

$$a. \sin(540^\circ + \theta)$$

$$b. \cos(720^\circ - \theta)$$

Oplossings:

$$a. \sin(540^\circ + \theta)$$

$$= \sin(540^\circ + \theta - 360^\circ)$$

$$= \sin(180^\circ + \theta)$$

$$= -\sin \theta$$

$$b. \cos(720^\circ - \theta)$$

$$= \cos(720^\circ - \theta - 360^\circ)$$

$$= \cos(360^\circ - \theta)$$

$$= \cos \theta$$

Negatiewe hoeke

Dit is belangrik om kennis te neem dat op die Cartesiese vlak is 'n hoek positief as rotasie in 'n anti-kloksgewys rigting is, en negatief as die rotasie kloksgewys is.

$$\begin{aligned}
 \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\
 \cos(-\theta) &= \cos(\theta) \\
 \tan(-\theta) &= -\tan \theta
 \end{aligned}$$

Uitgewerkte Voorbeeld 3

Skryf die volgende as 'n funksiewaarde van 'n positiewe skerphoek.

$$a. \sin(-50^\circ)$$

$$b. \tan(150^\circ)$$

$$c. \cos(-35^\circ)$$

Oplossings:

$$a. \sin(-50^\circ)$$

$$= -\sin 50^\circ$$

$$b. \tan(-150^\circ)$$

$$= -\tan 150^\circ$$

$$= -\tan(180^\circ - 30^\circ)$$

$$= -(-\tan 30^\circ)$$

$$= \tan 30^\circ$$

$$c. \cos(-35^\circ)$$

$$= \cos 35^\circ$$

Uitgewerkte Voorbeeld 4

Onthou:

$$a + b = b + a$$

$$-a + b = b - a$$

$$-a + b = -(a - b)$$

$$-a - b = -(a + b)$$

Vereenvoudig die volgende tot 'n funksie waarde van θ :

a. $\tan(\theta - 180^\circ)$

b. $\sin(-\theta - 360^\circ)$

Oplossings

a. $\tan(\theta - 180^\circ)$

$$= \tan(-180^\circ + \theta)$$

$$[\tan(-\text{hoek}) = -\tan(\text{hoek})]$$

$$= -\tan[-(180^\circ - \theta)]$$

$$= -\tan(180^\circ - \theta)$$

$$= \tan \theta$$

b. $\sin(-\theta - 360^\circ)$

$$[\text{neem gemene teken uit}]$$

$$= \sin[-(\theta + 360^\circ)]$$

$$= -\sin(\theta + 360^\circ)$$

$$[\sin(-\text{hoek}) = -\sin(\text{hoek})]$$

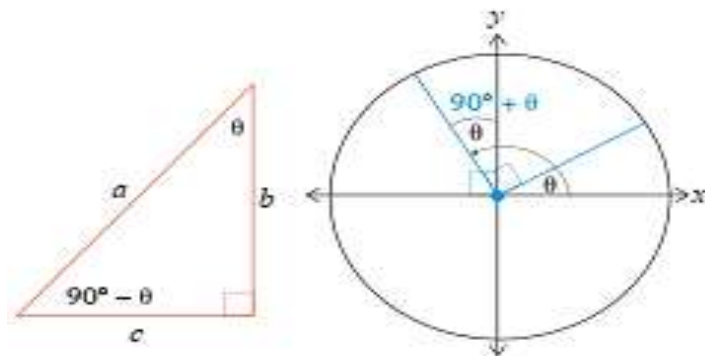
$$= -\sin(360^\circ + \theta)$$

$$= -[-\sin(\theta)]$$

$$= \sin(\theta)$$

Die Ko-verhoudings is $(90^\circ - \theta)$ en $(90^\circ + \theta)$

Ko-verhoudings word ook komplementêre verhoudings genoem.



Kyk na die figuur en jy sal sien dat :

$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{b}{a} = \cos \theta \quad \text{en} \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

Die $(90^\circ + \theta)$ lê in Kwadrant 2.

$$\sin(90^\circ + \theta) = \frac{b}{a} = \cos \theta \quad \text{en} \quad \cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta, \text{ omdat } \cos \theta \text{ negatief is in Kwadrant 2.}$$

Die volgende reduksie formules word gebruik om die ko-funksies te herlei:

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

Uitgewerkte Voorbeeld 5

$$(a) \frac{\sin(90^\circ - \theta) \cdot \sin \theta}{\cos \theta \cdot \cos(90^\circ + \theta)}$$

$$(b) \sin(\theta - 90^\circ)$$

$$(c) \cos(\theta - 90^\circ)$$

Oplossings:

$(a) \frac{\sin(90^\circ - \theta) \cdot \sin \theta}{\cos \theta \cdot \cos(90^\circ + \theta)}$ $= \frac{\cos \theta \cdot \sin \theta}{\cos \theta \cdot -\sin \theta}$ $= -1$	$(b) \sin(\theta - 90^\circ)$ $= \sin [-(\theta + 90^\circ)]$ $= -\sin(\theta + 90^\circ)$ $= -\sin(90^\circ + \theta)$ $= -\cos \theta$	$(c) \cos(\theta - 90^\circ)$ $= \cos [-(\theta + 90^\circ)]$ $= \cos(\theta + 90^\circ)$ $= \cos(90^\circ + \theta)$ $= -\sin \theta$
---	--	--

Uitgewerkte Voorbeeld 6

a. Herlei $\frac{\tan 43^\circ \cdot \sin 47^\circ \cdot 2 \cos 137^\circ}{2 \cos 317^\circ \cdot \sin 133^\circ - 1}$ tot 'n enkel trigonometriese verhouding van een hoek, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

b. Toon aan dat: $\sin(B + A) - \sin(B - A) = 2 \sin A \cos A$

Oplossings:

$$a \quad \frac{\tan 43^\circ \cdot \sin 47^\circ \cdot 2 \cos 137^\circ}{2 \cos 317^\circ \sin 133^\circ - 1}$$

$$\frac{\left(\frac{\sin 43^\circ}{\cos 43^\circ}\right) (\cos 43^\circ) (-2 \cos 43^\circ)}{2 \cos 43^\circ \cdot \cos 43^\circ - 1}$$

$$\frac{\sin 43^\circ (-2 \cos 43^\circ)}{\cos 2(43^\circ)}$$

$$\frac{-\sin 2(43^\circ)}{\cos 86^\circ}$$

$$= -\tan 86^\circ$$

$$b \quad \sin(B + A) - \sin(B - A)$$

$$= \sin B \cos A + \cos B \sin A - (\sin B \cos A - \cos B \sin A)$$

$$= \sin B \cos A + \cos B \sin A + \sin B \cos A - \cos B \sin A$$

$$= 2 \sin A \cos A$$



AKTIWITEITE:

1. Vereenvoudig die volgende, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, tot 'n enkele trigonometriese verhouding:

$$1.1 \quad \frac{\sin(90^\circ + x) \cdot \tan(360^\circ + x)}{\sin(180^\circ + x) \cdot \cos(90^\circ - x) + \cos(540^\circ + x) \cdot \cos(-x)}$$

$$1.2 \quad \frac{\cos(720^\circ - x) \cdot \sin(360^\circ + x) \cdot \tan(x - 180^\circ)}{\sin(-x) \cdot \cos(90^\circ - x)}$$

$$1.3 \quad \frac{\cos(-210) \cdot \sin^2 405^\circ \cos 14^\circ}{\tan 120^\circ \cdot \sin 104^\circ}$$

$$1.4 \quad \frac{\sin(450^\circ - x) \tan(x - 180^\circ) \sin 23^\circ \cdot \cos 23^\circ}{\cos 46^\circ \cdot \sin(-x)}$$

$$1.5 \quad \frac{4 \cos(-x) \cdot \cos(90^\circ + x)}{\sin(30^\circ - x) \cdot \cos x + \cos(30^\circ - x) \cdot \sin x}$$

- 2.1 **SONDER die gebruik van 'n sakrekenaar**, bepaal die volgende in terme van $\sin 25^\circ$:

$$2.1.1 \quad \sin 335^\circ$$

$$2.1.2 \quad \cos 50^\circ$$

- 2.2 Vereenvoudig die volgende uitdrukking tot EEN trigonometriese verhouding:

$$\frac{\sin(-2x) \cdot (1 - \sin^2 x)}{\sin(90^\circ + x) \cdot \tan x}$$

- 2.3 **SONDER die gebruik van 'n sakrekenaar**, vereenvoudig $(p \tan 30^\circ + q \sin 60^\circ)^2$.

- 2.4 Gegee: $\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$

2.4.1 Gebruik die formule vir $\cos(A - B)$ om 'n formule vir $\sin(A - B)$ af te lei.

2.4.2 Bewys dat: $\sin 9A + \sin A = 2 \sin 5A \cdot \cos 4A$.

2.4.3 Skryf die maksimumwaarde van $3^2 \sin 5A \cos 4A$ neer.

3. Evalueer:

3.1 $\sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ$

4. Evalueer elk van die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

4.1 $\sin 75^\circ$

4.2 $\cos 15^\circ$

4.3 $\cos 105^\circ$

4.4 $\sin 165^\circ$

4.5 $\sin 36^\circ \cos 54^\circ + \cos 36^\circ \sin 54^\circ$

4.6 $\cos 42^\circ \cos 18^\circ - \sin 42^\circ \sin 18^\circ$

4.7 $\sin 85^\circ \sin 25^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ$

4.8 $\sin 70^\circ \cos 40^\circ - \cos 70^\circ \sin 40^\circ$

5 Bewys die identiteit:

$$\frac{3 \sin x + 2 \sin 2x}{2 + 3 \cos x + 2 \cos 2x} = \tan x$$

6. **Sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, vereenvoudig die volgende uitdrukking tot EEN trigonometriese verhouding:

$$2 \cos^2 15^\circ - 1 + \frac{2 \sin 140^\circ}{\cos 310^\circ}$$

7 Vereenvoudig:

$$\frac{1 - \sin(-\theta) \cos(90^\circ + \theta)}{\cos(\theta - 360^\circ)}$$

8 Beskou: $\frac{\cos 2x + \sin 2x - \cos^2 x}{\sin x - 2 \cos x} = -\sin x$

8.1 Bewys die identiteit.

8.2 Bepaal die waarde van: $\frac{\cos 2x + \sin 2x - \cos^2 x}{-3 \sin^2 x + 6 \sin x \cos x}$

9. Bewys die volgende identiteit: $\frac{\sin 2x - \cos x}{1 - \cos 2x - \sin x} = \frac{1}{\tan x}$

:

AFDELING 4: Trigonometriese Funksies



In hierdie afdeling, sal on die grafieke van die basiese funksies bespreek, $y = \sin \theta$ en $y = \cos \theta$ en $y = \tan \theta$, waarna die algemene funksies voorgestel sal word:

$$y = a \sin k(x - p) + q ; y = a \cos k(x - p) + q ; y = a \tan k(x - p) + q$$

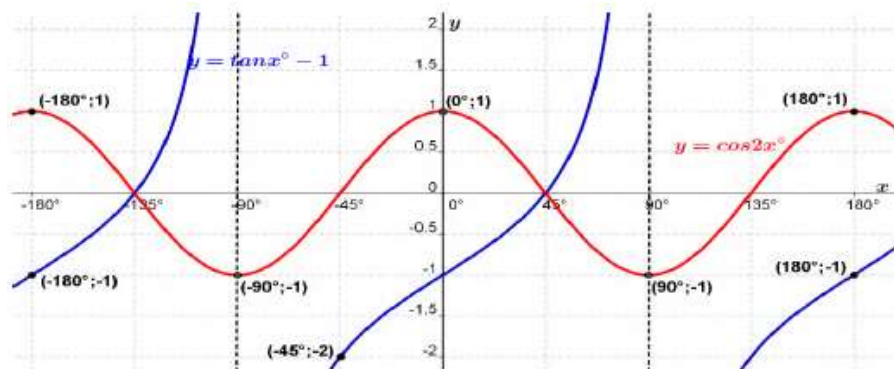
Uitgewerkte Voorbeeld 1

Teken op dieselfde assestelsel, die sketsgrafieke van:

$f(x) = \tan x - 1$ en $g(x) = \cos 2x$, vir die interval $[-180^\circ; 180^\circ]$. Toon al die afsnitte met die asse en die koördinate van die draaipunte. Toon ook die asimptote van $y = \tan x - 1$.

- (a) Gebruik die sketsgrafieke om die waarde van x te bepaal, as: $\cos 2x + 1 \leq \tan x$, in die interval $[-180^\circ; 180^\circ]$.
- (b) As die kurwe van $y = \tan x - 1$, 3 eenhede opwaarts geskuif word, wat sal die nuwe vergelyking wees?
- (c) Skryf die periode van $y = \cos 2x$ neer.

Oplossings:



(a) $\cos 2x + 1 \leq \tan x$

$$\cos 2x \leq \tan x - 1$$

$$g(x) \leq f(x)$$

$$-135^\circ \leq x < -90^\circ \text{ en } -90^\circ < x \leq 135^\circ$$

(b) $y = \tan x + 2$

(c) periode : 180°

Uitgewerkte Voorbeeld 2

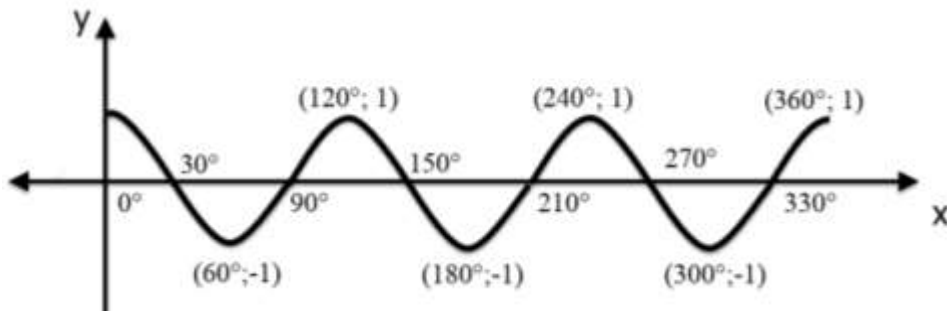
Vind die periode van f en teken die grafiek van f :

a. $f(x) = \cos 3x$, $x \in [0^\circ; 360^\circ]$

b. $f(x) = \tan \frac{1}{2}x$, $x \in [0^\circ; 360^\circ]$

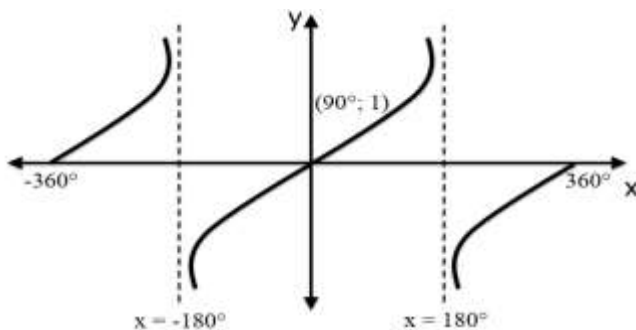
Oplossings:

a. Periode: $\frac{360^\circ}{k} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$



Ons het drie(3) volle cosinus-grafieke in hierdie vraag.

b. Periode: $\frac{180^\circ}{k} = \frac{180^\circ}{\frac{1}{2}} = 360^\circ$



HORISONTALE SKUIF/TRANSLASIE

$$y = \sin(x - p) \text{ of } y = \cos(x - p) \text{ of } y = \tan(x - p)$$

- As $p > 0$; skuif na regs [bv.. $y = \sin(x - 30^\circ)$]
 $p < 0$: skuif na links [bv. $y = \cos(x + 45^\circ)$]

Hoe om 'n horisontale skuif te skets/af te steek

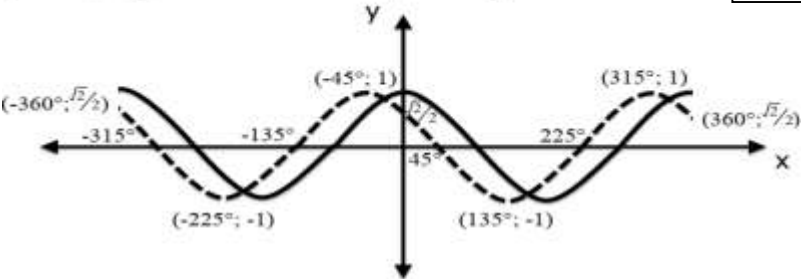
- Skets die oorspronlike kurwe
- Skuif te kritiewe punte links/regs
- Gee byskrifte vir x-afsnitte en draaipunte
- Bereken en gee byskrifte aan eindpunte en y-afsnit

Uitgewerkte Voorbeeld 3

1. $y = \cos(x + 45^\circ)$ for $x \in [-360^\circ; 360^\circ]$ (dotted line)
 $y = \cos x$ (solid line - for comparison)

stippellyn

Soliede lyn – om te vergelyk



Endpoints: Eindpunte

$$\cos(-360^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{and} \quad \cos(-360^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y-afsnit

y-cut:

$$\cos(0^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

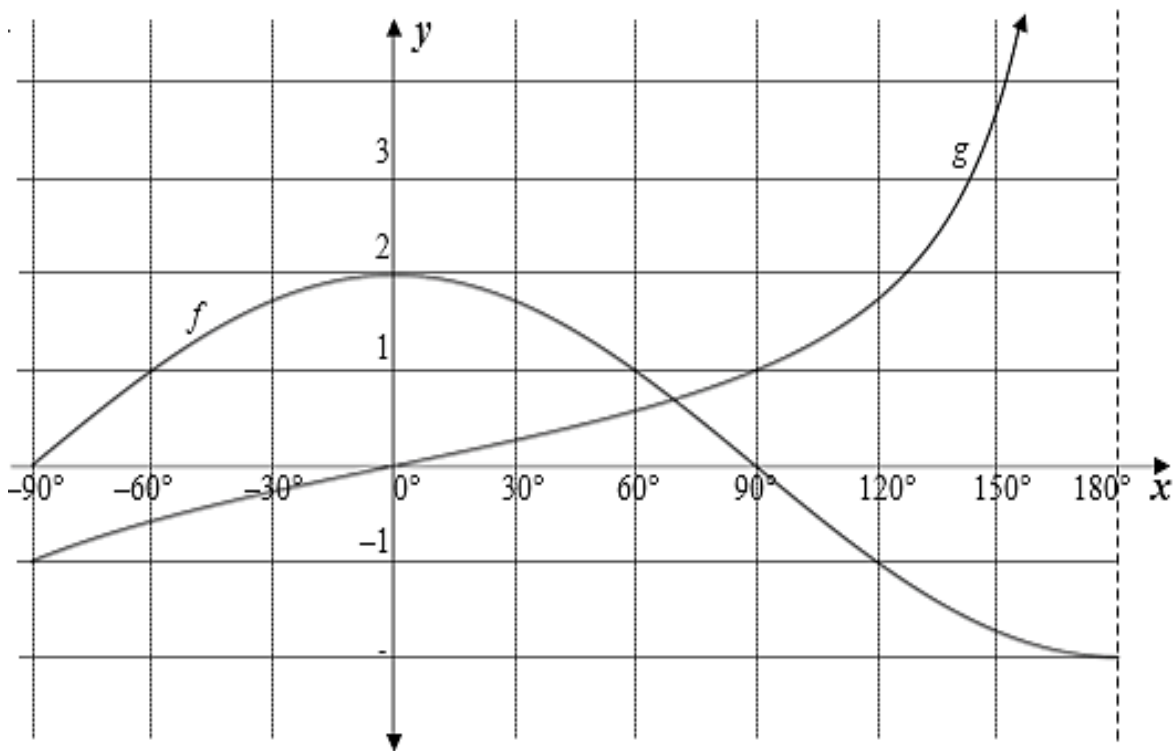


Trigonometriese Funksies

AKTIWITEITE:

1.

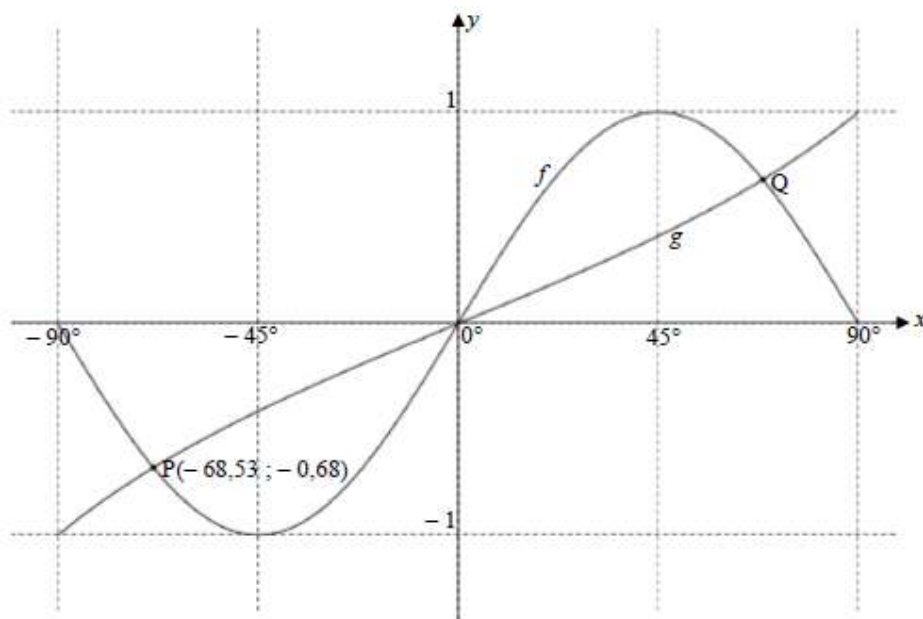
In die diagram hieronder, is die grafieke van $f(x) = 2\cos x$ en $g(x) = \tan bx$ geteken, vir die interval $x \in [-90^\circ; 120^\circ]$.



Gebruik die grafieke om die volgende vrae te beantwoord.

- 1.1 Skryf die waarde van b neer.
- 1.2 Skryf die waardeversameling/terrein van g vir die interval $x \in [-90^\circ; 120^\circ]$ neer.
- 1.3 Skryf die periode van g neer.
- 1.4 Skryf die waarde van x , in die gegewe interval neer, waar $g(x + 5^\circ) - f(x + 5^\circ) = 1$.
- 1.5 Skryf TWEE waardes van x in die gegewe interval neer, waar $\frac{g(x)}{f'(x)}$ ongedefinieerd is.
- 1.6 Skryf die waarde van p neer as $\sum_{x=0}^p (2 \cos x) = 0$

- 2 In die diagram hieronder, is die grafieke van $f(x) = a\sin 2x$ en $g(x) = \tan bx$ vir $x \in [-90^\circ; 90^\circ]$ geteken. P $(-68,53^\circ; -0,68)$ en Q is die sny punte van f en g .



- 2.1 Waarde van a
- 2.2 Koördinate van Q
- 2.3 x -waardes van die draaipunte van h , as $h(x) = f(x + 30^\circ)$
- 2.4 Waarde(s) van x , waar $0,68 < g(x) \leq 1$
- 2.5 Waarde(s) van m , waar $f(x + m) = -\cos 2x$
- 2.6 Waarde van b

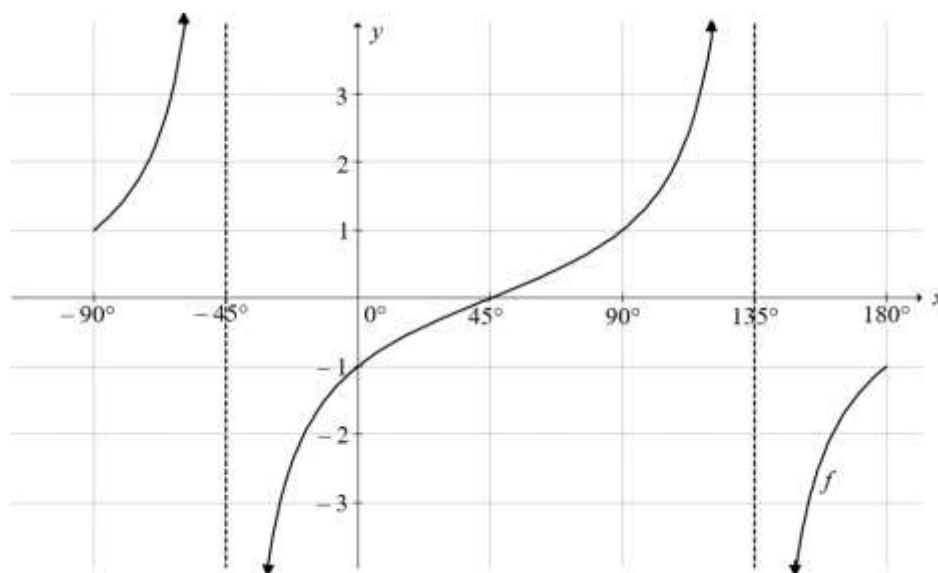
3. Gegee : $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ en $g(x) = \sin(x - 30^\circ)$ vir $x \in [-180^\circ; 180^\circ]$.

Die grafieke van f en g , sny by A en B

- 3.1 Gebruik die rooster wat voorsien is om die sketsgrafieke van f en g op dieselfde assestelsel te teken. Toon al die afsnitte met die asse en die koördinate van die draaipunte duidelik aan.
- 3.2 Bereken die x -koördinate van A en B.
- 3.3 Meld die periode van grafiek f .
- 3.4 Bepaal die waardes van $x \in [-90^\circ; 180^\circ]$ waarvoor $g(x) \cdot f(x) < 0$.
- 3.5 Gegee dat die algemene oplossing van $f(x) = g(x)$ is: $x = 80^\circ - k \cdot 240^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
Bepaal die x waardes van punt A en B.
- 3.6 Vir watter waarde(s) van x sal:.
 - 3.6.1 $f(x) > g(x)$
 - 3.6.2 $f'(x) \cdot g(x) > 0$, waar $x > 0^\circ$

In die diagram hieronder, is die grafiek van $f(x) = \tan(x - 45^\circ)$ geteken vir $x \in [-90^\circ; 180^\circ]$.

4.



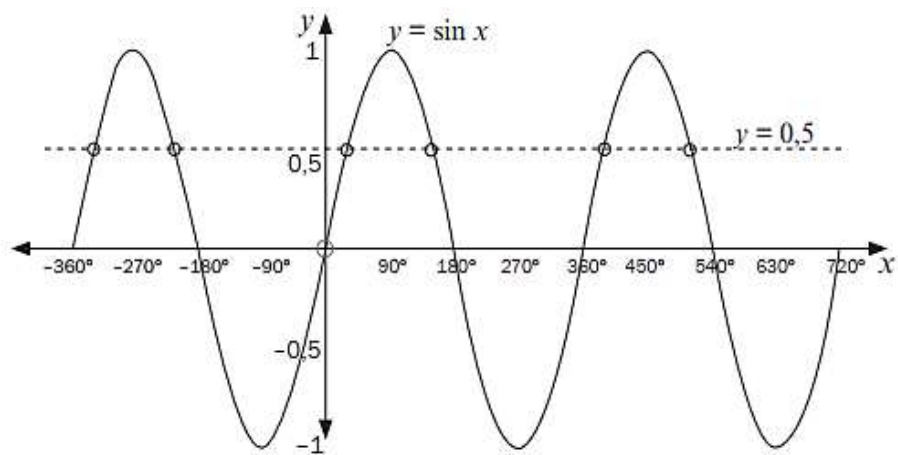
- 4.1 Skryf die periode van f neer.
- 4.2 Teken die grafiek van $g(x) = -\cos 2x$ vir die interval $x \in [-90^\circ; 180^\circ]$ op die rooster wat voorsien is. Toon ALLE afsnitte met die asse, sowel as die minimum en maksimum punte van die grafiek aan.
- 4.3 Skryf die waardeversameling/terrein van g neer.
- 4.4 Die grafiek van g word 45° na links geskuif om die grafiek van h te vorm. Bepaal die vergelyking van h in eenvoudigste vorm.
- 4.5.1 Gebruik die grafiek(e) om die waardes van x , in die interval $x \in [-90^\circ; 90^\circ]$ te bepaal waarvoor:
 - 4.5.1 $f(x) > 1$
 - 4.5.2 $2 \cos 2x - 1 > 0$

AFDELING 5: Trigonometriese Vergelykings



'n Vergelyking met 'n onbekende wat een of meer trigonometriese verhoudings van 'n onbekende hoek betrek word 'n **trigonometriese vergelyking** genoem. Die oplossing van 'n trigonometriese vergelyking is die waarde van 'n onbekende hoek wat die vergelyking bevredig.

By voorbeeld, $\sin \theta = \frac{1}{2}$, ons weet dat θ kan 30° wees. Daar is egter, ander waardes vir θ in ander kwadrante. Kyk na die grafiek vir $\sin \theta = \frac{1}{2}, \theta \in [-360^\circ; 720^\circ]$. Daar is ses(6) waardes vir θ tussen b -360° en 720°



Dus mag die trigonometriese vergelyking 'n oneidige aantal oplossings hê (as gevolg van die periodieke natuur)

Basies	Vierkante	Ko-funksies	Faktorisering
• Isoleer die trig. verhouding • Bepaal die verwysingshoek • Kies die Kwadrant	• Doen AL vier kwadrante	• Sin en cos met verskillende hoeke • Die hoek wat jy verander is die verwysingshoek.	• Gebruik die Algebra beginsels.

Uitgewerkte Voorbeeld

Gegee die vergelyking: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, vind die algemene oplossing.

a. Oplossing met behulp van die “CAST” DIAGRAM

- Vind die inverse van $\sin x$ op beide kante, om die verwysingshoek te vind.
[Ons gebruik altyd die positiewe waardes].
$$x = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60^\circ$$

Verwysingshoek (VH) = 60°
- Gebruik die CAST-diagram om te kyk in watter kwadrante die gegewe funksie negatief is.
Sinus is negatief in 3^{de} en 4^{de} kwadrant
- Vind die algemene oplossing in beide kwadrante:
 - ❖ Die algemene oplossing vir 3^{de} kwadrant is $x = 180^\circ + VH + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
$$x = 180^\circ + 60^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$x = 240^\circ + k \cdot 360^\circ$$
 - OF**
 - ❖ Die algemene oplossing vir 4^{de} kwadrant is $x = 360^\circ - VH + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$
$$x = 360^\circ - 60^\circ + k \cdot 360^\circ$$
$$x = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$$

b. Los vir die algemene oplossing op deur grafiese metode te gebruik.

Die oplossing vir $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
is:

$$x = \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$
$$x = -60^\circ + k \cdot 360^\circ$$

OF

$$x = 180^\circ - \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$
$$x = 240^\circ + k \cdot 360^\circ$$

In die Algemeen,

- As $\sin \theta = a$, word die algemene oplossing gegee deur:
$$\theta = \sin^{-1}(a) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

OF

$$\theta = 180^\circ - \sin^{-1}(a) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$
- As $\cos \theta = a$, word die algemene oplossing gegee deur:
$$\theta = \pm \cos^{-1}(a) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$
- As $\tan \theta = a$, word die algemene oplossing gegee deur:
$$\theta = \tan^{-1}(a) + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

NB : Vervang “**a**” met teken, as “**a**” positief is vervang as positief, as dit negatief is, vervang met negatief

Uitgewerkte Voorbeeld 1

Vind die algemene oplossing van die volgende vergelykings:

a) $\cos \theta = -0.25$

b) $\sin 2\theta = 0.766$

c) $\cos (\theta - 15) = \frac{1}{2}$

d) $3\sin (\theta - 15) + 1 = -0.456$

Oplossings

a) $\cos \theta = -0.25$

$$\theta = \pm \cos^{-1}(-0.25)$$

$$\theta = \pm 104.48 + k.360, \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) $\sin 2\theta = 0.766$

$$\begin{aligned} \text{verwysingshoek} &= \sin^{-1}(0.766) \\ &= 50^\circ \end{aligned}$$

$$2\theta = 50^\circ + k.360^\circ \quad \text{of} \quad 2\theta = 180^\circ - 50^\circ + k.360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = 25^\circ + k.180^\circ \quad \text{of} \quad \theta = 65^\circ + k.180^\circ$$

c) $\cos (\theta - 15) = \frac{1}{2}$

$$\theta = \pm \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta - 15^\circ = \pm 60^\circ + k.360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = 15^\circ + 60 + k.360^\circ \quad \text{of} \quad \theta = 15^\circ - 60^\circ + k.360^\circ$$

$$\theta = 75^\circ + k.360^\circ \quad \text{of} \quad \theta = -45^\circ + k.360^\circ$$

d) $3\sin (\theta - 15) + 1 = -0.456$

$$\sin(\theta - 15^\circ) = -1.456$$

$$\sin (\theta - 15^\circ) = -\frac{182}{375}$$

$$\begin{aligned} \text{verwysingshoek} &= \sin^{-1}\left(-\frac{182}{375}\right) \\ &= -29.03^\circ \end{aligned}$$

$$\theta - 15^\circ = -29.03^\circ + k.360^\circ \quad \text{of} \quad \theta - 15^\circ = 180^\circ - (-29.03^\circ) + k.360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = -14.03^\circ + k.360^\circ \quad \text{of} \quad \theta = 209.03^\circ + k.360^\circ$$

Uitgewerkte Voorbeeld 4

(a) Vir watter waarde(s) van x sal $\frac{2\tan x - \sin 2x}{2\sin^2 x}$ ongedefinieerd wees,
in die interval $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

(b) Bewys die identiteit: $\frac{2\tan x - \sin 2x}{2\sin^2 x} = \tan x$

Oplossings:

Die identiteit is ongedefinieerd vir:

a) The identity is undefined for
as: $2\sin^2 x = 0$

$\therefore \sin x = 0: x = 0^\circ; 180^\circ$

or

$\tan x = \infty: x = 90^\circ$

$\therefore x = 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ$

$$\begin{aligned} \text{b) LK} &= \frac{2\tan x - \sin 2x}{2\sin^2 x} \\ &= \frac{2\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) - 2\sin x \cos x}{2\sin^2 x} \\ &= \left(\frac{2\sin x - 2\sin x \cos^2 x}{\cos x}\right) \times \frac{1}{2\sin^2 x} \\ &= \frac{2\sin x(1 - \cos^2 x)}{\cos x} \times \frac{1}{2\sin^2 x} \\ &= \frac{2\sin x(\sin^2 x)}{\cos x} \times \frac{1}{2\sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \tan x \\ &= \text{RK} \end{aligned}$$

Uitgewerkte Voorbeeld 5

Bepaal die algemene oplossing vir die volgende:

- a. $6 \cos x - 5 = \frac{4}{\cos x}$
- b. $\sin 2x = \cos x$
- c. $3 \sin x = 4 \cos x$
- d. $4 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + 1 = 0$
- e. $\cos 2x - 4 \sin x + 5 = 0$
- f. $\sin x + \cos x = 1$
- g. $\sin 2x + \cos x = 0$
- h. $2 \cos x = \cos(60 - x)$
- i. $3 \sin^2 x - \sin 2x - \cos^2 x =$

Oplossings :

a. $6 \cos^2 x - 5 \cos x - 4 = 0$ [Soos die kwadratiese vergelyking $6k^2 - 5k - 4 = 0$]

$$(2 \cos x + 1)(3 \cos x - 4) = 0$$

$$\begin{array}{ll} (2 \cos x + 1) = 0 & \text{of} \quad (3 \cos x - 4) = 0 \\ 2 \cos x = -1 & \text{of} \quad 3 \cos x = 4 \end{array}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \qquad \cos x \neq \frac{4}{3}$$

$$\therefore \cos x = -\frac{1}{2}$$

Algemene oplossings:

$$x = \pm \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + k \cdot 360^\circ \qquad \text{of} \qquad x = -\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + k \cdot 360^\circ$$

$$x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ \qquad \text{of} \qquad x = -120^\circ + k \cdot 360^\circ$$

b. $\sin 2x = \cos x, x \in [-90^\circ, 180^\circ]$

$$\cos(90^\circ - 2x) = \cos x \qquad \text{[Die ko-funksie word gebruik]}$$

$$90^\circ - 2x = \pm \cos^{-1} \cos(x) + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$90^\circ - 2x = x + k \cdot 360^\circ \qquad \text{of} \qquad 90^\circ - 2x = -x + k \cdot 360^\circ$$

$$-3x = -90^\circ + k \cdot 360^\circ \qquad -x = -90^\circ + k \cdot 360^\circ$$

$$x = 30^\circ - k \cdot 120^\circ \qquad x = 90^\circ - k \cdot 360^\circ$$

Deel albei kante deur $\cos x$ om $\tan x$ op LK te kry

c. $3 \sin x = 4 \cos x$ [Divide both sides by $\cos x$ to create $\tan x$ on LHS]

$$\frac{3 \sin x}{\cos x} = \frac{4 \cos x}{\cos x}$$

[Trig identity for $\tan x$]

Trig. identiteit vir $\tan x$

$$3 \tan x = 4$$

$$\tan x = \frac{3}{4}$$

Verw. Hoek $= 53,13^\circ$

$$x = 53,13^\circ + k180^\circ \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

d. $4 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + 1 = 0$

$$4 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + (\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$5 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$$

$$(5 \cos x + \sin x)(\cos x + \sin x) = 0$$

$$5 \cos x + \sin x = 0 \quad \text{or}$$

$$\cos x + \sin x = 0$$

$$\frac{5 \cos x}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x} \quad \text{or}$$

$$\frac{\cos x}{\cos x} = \frac{-\sin x}{\cos x}$$

$$5 = -\tan x \therefore \tan x = -5$$

$$1 = -\tan x \therefore \tan x = -1$$

Verw. Hoek $= 78,69^\circ$

Verw. Hoek $= -45^\circ$

$$x = 180^\circ - 78,69^\circ + k180^\circ \quad \text{or}$$

$$\therefore x = 180^\circ - 45^\circ + k180^\circ$$

$$\therefore x = 101,3^\circ + k180^\circ$$

$$\therefore x = 135^\circ + k180^\circ \quad k \in \mathbb{Z}$$

e. $\cos 2x - 4 \sin x + 5 = 0$

$$1 - 2\sin^2 x - 4 \sin x + 5 = 0$$

$$[\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x]$$

$$-2\sin^2 x - 4 \sin x + 6 = 0$$

$$\sin^2 x - 2 \sin x - 3 = 0$$

[Het gedeel met -2]

$$(\sin x - 3)(\sin x + 1) = 0$$

[Faktoriseer]

$$\sin x \neq 3 \quad \text{of} \quad \sin x = -1$$

$$x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

f. $\sin x + \cos x = 1$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1^2$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1$$

$$[\sin^2 x + \cos^2 x = 1]$$

$$1 + 2 \sin x \cdot \cos x = 1$$

$$\sin 2x = 0$$

$$[2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x]$$

$$2x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$$

[deel ELKE TERM deur 2]

g. $\sin 2x + \sin x = 0$
 $2 \sin x \cos x + \sin x = 0$ [Verander dubbelhoeke na enkel hoeke:
 $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x]$
 $\sin x (2 \cos x + 1) = 0$ [Faktoriseer deur gemene faktor $\sin x$ uit te haal]
 $2 \cos x + 1 = 0$ of $\sin x = 0$
 $\cos x = -\frac{1}{2}$ $x = 0^\circ + n \cdot 180^\circ$
 $x = \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

h. $2 \cos x = \cos(60^\circ - x)$
 $2 \cos x = \cos 60^\circ \cdot \cos x + \sin 60^\circ \cdot \sin x$
 $2 = \cos 60^\circ + \frac{\sin 60^\circ \cdot \sin x}{\cos x}$ [Deel al die terme deur $\cos x$]
 $2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tan x$
 $\frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tan x$
 $\frac{3}{\sqrt{3}} = \tan x$
 Verwysingshoek = 60°
 $x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$



AKTIWITEITE

1. Bepaal die algemene oplossing vir die volgende:
 - 1.1 $\sin^2 x - \sin x = \cos^2 x$
 - 1.2 $\sin^2 x + \sin x \cos x = 0$
2. Bepaal die algemene oplossing van : $3 \cos 2x = 1 + 5 \cos x$
3. Los op vir x : $4 \sin^2 x - 3 \sin x - 1 = 0$; vir $x \in [0^\circ; 360^\circ]$
4. Bepaal die algemene oplossing van $\tan x = 2 \sin 2x$ where $\cos x < 0$.
5. Bereken die waarde van x , as $x \in [-180^\circ; 360^\circ]$ $\cos 2x = \cos x + 2$



BIBLIOGRAFIE

1	Study guide Via Afrika mathematics Grade 12
2	CURRICULUM AND ASSESSMENT POLICY STATEMENT(CAPS) SENIOR PHASE GRADES (7 – 9) MATHEMATICS
3	CURRICULUM AND ASSESSMENT POLICY STATEMENT(CAPS) FET PHASE GRADES (10 – 12) MATHEMATICS
4	MATHEMATICS QUESTION PAPER GRADE 9 2013 EASTERN CAPE
5	MATHEMATICS QUESTION PAPER GRADE 9 2014 EASTERN CAPE
6	MATHEMATICS QUESTION PAPER GRADE 9 2016 EASTERN CAPE
7	MATHEMATICS QUESTION PAPER GRADE 9 2011 EASTERN CAPE
8	BISHOPS DIOCESAN COLLEGE GRADE 9 PAPER 2 2017
9	2021 Grade 12 MATHEMATICS EXAMINATION GUIDELINES
10	MATHEMATICS QUESTION PAPERS GRADE 12 (2008 – 2017) NATIONAL
11	MIND ACTION SERIES TEXT BOOK GRADE 12
12	MATHEMATICS QUESTION PAPER GRADE 9 2017 - 2020 GAUTENG
13	WWW.MATHISFUN.COM