JENN
Training and Consultancy
The path to enlightened education

Province of the
EASTERN CAPE
EDUCATION

WISKUNDE

GRAAD 12

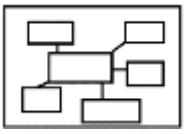
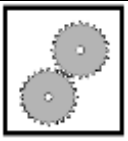
LENTESKOOL

ONDERWYSER & LEERDER HANDLEIDING

2026

Scan om die video lesse te kyk!

IKOON BESKRYWING

 BREINKAART	 EKSAMEN RIGLYN	 INHOUD	 AKTIWITEITE
 BIBLIOGRAFIE	 TERMINOLOGIE	 UITGEWERKTE VOORBEELDE	 STAPPE

INHOUD **BLADSY**

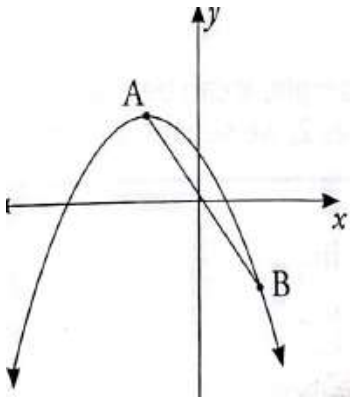
AFDELING 1: KALKULUS / DIFFERENSIAAL REKENE	
Gemiddelde gradiënt	4
Afgeleide - Eerste Beginsels	5 – 8
Afgeleide/Differensiasie deur reëls/wette	9 – 12
Vergelyking van ’n raaklyn	13 – 14
Derdegraadse Funksie	15 – 23
Aktiwiteite	24 – 27
AFDELING 2: ANALITIESE MEETKUNDE	
Hersiening Graad 11	28 – 35
Sirkels	36 – 42
Aktiwiteite	43 – 49
BIBLIOGRAFIE	50

AFDELING 1 : KALKULUS / DIFFERENSIAAL REKENE

1.1 GEMIDDELDE GRADIËNT

Die gemiddelde gradiënt van ’n funksie op ’n kurwe is die gradiënt van die reguitlyn wat deur hierdie twee punte gaan.

Dit kan bepaal word deur $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, waar $(x_1 ; f(x_1)$ en $(x_2 ; f(x_2)$ die twee punte is waarvan ons die gemiddelde gradiënt wil hê.



Daarom sal die gemiddelde gradiënt : $m_{\ gemiddelde} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

UITGEWERKTE VOORBEELD 1

Vind die gemiddelde gradiënt van $f(x) = x^2 - 16$ tussen $x = 5$ en $x = 9$.

Oplossing:

$$m_{\ gemiddelde} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$= \frac{(9)^2 - 16 - ((5)^2 - 16)}{9 - 5}$$
$$= \frac{65 - 9}{4}$$
$$= 14$$

AFDELING 1.2 : EERSTE BEGINSELS

Die vraag sal jou vrae om die afgeleide te bepaal deur middel van EERSTE BEGINSELS (definisie). Jy moet die formule gebruik: $f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$

Oefening verskeie voorbeelde van die volgende funksies: 1. $f(x) = ax + k$

2. $f(x) = ax^2 + bx + c$
3. $f(x) = ax^3$
4. $f(x) = \frac{a}{x}$

Die konstantes a, b en c kan enige konstante veranderlike of heelgetal of breuke of enige tipe nommer wees.

Differensiasie(Afgeleide) vanuit Eerste Beginsels (vanaf die Definisie)

Om vanuit eerste begingsels te differensieer/afgeleide te bepaal, word die volgende stappe aanbeveel:

Stap 1: Skryf die gegewe funksie, $f(x)$ neer.

Stap 2: Vereenvoudig $f(x+h)$

Stap 3: Vereenvoudig $f(x+h)-f(x)$

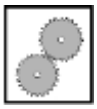
**** Maak seker dat $f(x)$ altyd in hakkies is ****

Stap 4: Skryf die KORREKTE formule vanaf die formuleblad neer: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Stap 5: Vervang antwoorde van ***stap 3*** in ***stap 4***

Stap 6: Vereenvoudig ***stap 5***

Stap 7: **Skryf jou antwoord met SEKERHEID/SELFVERTROUE neer.**



UITGEWERKTE VOORBEELD 2

Bepaal, vanuit eerste beginsels, die gradiënt van $f(x)=2x$ by enige punt.

$f(x)=2x$

$f(x+h)=2(x+h)$

$=2x+2h$

$f(x+h)-f(x)=2x+2h-(2x)$

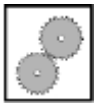
$=2h$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h}$

$f'(x)=\lim_{h\to 0}2$

$f'(x)=2$



UITGEWERKTE VOORBEELD 3

Vind, vanuit eerste beginsels, die afgeleide van $f(x) = 6$ by enige punt.

$f(x) = 6$

$f(x+h) = 6$ (*omdat daar geen* x *in die gegewe funksie is nie, beteken dit dat* $f(x+h) = f(x)$)

$f(x+h) - f(x) = 6 - 6$

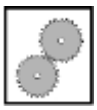
$= 0$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} 0$

$f'(x) = 0$



UITGEWERKTE VOORBEELD 4

Vind $f'(x)$ vanuit eerste beginsels as $f(x) = 3x^2 + x$

$f(x) = 3x^2 + x$

$f(x+h) = 3(x+h)^2 + (x+h)$

$= 3(x^2 + 2xh + h^2) + x + h$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 + x + h$

$f(x+h) - f(x) = 3x^2 + 6xh + 3h^2 + x + h - (3x^2 + x)$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 + x + h - 3x^2 - x$

$= 6xh + 3h^2 + h$

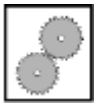
$= h(6x + 3h + 1)$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(6x+3h+1)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} (6x + 3h + 1)$

$f'(x) = 6x + 1$



UITGEWERKTE VOORBEELD 5

Vind $f'(x)$ vanuit eerste beginsels as $f(x) = -x^3$

$f(x) = -x^3$

$f(x+h) = -(x+h)^3$

$= -(x^2 + 2xh + h^2)(x+h)$

$= -(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3)$

$= -x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3$

$f(x+h) - f(x) = -x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 - (-x^3)$

$= -x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 + x^3$

$= -3x^2h - 3xh^2 - h^3$

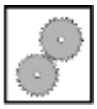
$= h(-3x^2 - 3xh - h^2)$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(-3x^2-3xh-h^2)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} (-3x^2 - 3xh - h^2)$

$f'(x) = -3x^2$



UITGEWERKTE VOORBEELD 6

Bepaal, vanuit eerste beginsels, die afgeleide van $f(x) = \frac{1}{x}$.

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f(x+h) = \frac{1}{x+h}$

$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}$

$= \frac{1(x)-1(x+h)}{(x+h)x}$

$= \frac{x-x-h}{x^2+xh}$

$= \frac{-h}{x^2+xh}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{-h}{x^2+xh}\right)}{h}$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{-h}{x^2+xh} \times \frac{1}{h}\right)$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2+xh}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

AFDELING 1.3 : Reëls/Wette van Differensiasie

Ons sal nou die afgeleide bepaal deur die differensiasie reëls te gebruik. Die volgende notasies word vir differensiasie/afgeleide gebruik.:

$\frac{dy}{dx}$ / D_x as $y = \ldots$ gegee is

$f'(x)$ as $f(x)$ gegee is

Al die notasies hierbo sê dat ons met betrekking tot *x* moet differensieer.

Nodige voorkennis:

- Hoe om hakkies uit te vermenigvuldig.
- Hoe om wortelvorm na eksponensiale vorm te verander/herlei: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$
- Hoe om 'n veranderlike uit noemer te verwyder: $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

As $f(x) = ax^n$, dan is die afgeleide $f'(x) = anx^{n-1}$ **(Magsreël / Power rule)**

NB: 1. Jy mag nie differensieer terwyl die uitdrukking nog **hakkies** het nie – **vermenigvuldig/maal eers uit.**

2. Jy mag nie differensieer terwyl x **nog in die noemer** is nie - skryf $\frac{1}{x^n}$ as x^{-n}

3. Jy mag nie differensieer terwyl daar 'n wortelvorm is nie – skryf $\sqrt{x}$ as $x^{\frac{1}{2}}$

***Reël 1*:** As $f(x) = ax^n$, dan is $f'(x) = a.nx^{n-1}$

Voorbeeld

$f(x) = -4x^3$, dan is $f'(x) = -12x^2$

***Reël 2*:** As $f(x) = ax$, dan is $f'(x) = a$

Voorbeeld

$f(x) = -4x$, dan is $f'(x) = -4$

***Reël 3*:** As $f(x) = \mathbf{a}$, dan is $f'(x) = \mathbf{0}$

Voorbeeld

$f(x) = 9$, dan is $f'(x) = 0$

***Reël 4*:** As $f(x) =$ letter (nie x) want as 'n konstante behandel word, dan is $f'(x) = \mathbf{0}$

Voorbeeld

As $f(x) = k$, dan is $f'(x) = 0$

Reël 5: $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$

Voorbeeld

Bepaal: $\frac{dy}{dx}$ as $y = -4x^2 + 7x - 8$, dan is $\frac{dy}{dx} = -8x + 7$

Voorbeeld (Gebruik van die simbole $f'(x)$ en $\frac{dy}{dx}$)

a) As $f(x) = x^4 + 6x + 7$, bepaal $f'(x)$, die afgeleide van f.

Reël 1 Reël 2 Reël 3

$$f'(x) = 4x^{4-1} + 6 + 0$$

$$\therefore f'(x) = 4x^3 + 6$$

b) As $g(x) = 4x^5 + 5\pi + t^2$, bepaal $g'(x)$, die gradiënt van g.

Reël 1 Reël 3 Reël 4

$$g'(x) = 4 \times 5x^{5-1} + 0 + 0$$

$$\therefore g'(x) = 20x^4$$

c) As $y = \frac{1}{3}x^{-6} + x + \frac{x^3}{3}$, bepaal $\frac{dy}{dx}$, die afgeleide van y met betrekking tot x.

$y = \frac{1}{3}x^{-6} + x + \frac{x^3}{3}$

Herskryf $\frac{x^3}{3}$ as $\frac{1}{3}x^3$ deur duidelik die koëffisiënt en veranderlike te skei.

$\therefore y = \frac{1}{3}x^{-6} + x + \frac{1}{3}x^3$

Gebruik nou die reëls om te differensieer (Vind die afgeleide)

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \times -6x^{-6-1} + 1 + \frac{1}{3} \times 3x^{3-1}$ (**Reël 1, Reël 2, Reël 1**)

$\therefore \frac{dy}{dx} = -2x^{-7} + 1 + x^2$

***Nota**: Die simbole $f'(x)$ en $\frac{dy}{dx}$ verwys na die gradiënt of afgeleide van funksies wat in die vorm $f(x) = \ldots$ en $y = \ldots$ geskryf is.*

Voorbeeld: (Gebruik van simbool D_x)

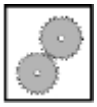
Bepaal: $D_x\ [\pi x^2 + \pi^2 + x^{-2}]$

$D_x\ [\pi x^2 + \pi^2 + x^{-2}]$

$= \pi \times 2x^{2-1} + 0 + (-2)x^{-2-1}$

$= 2\pi x - 2x^{-3}$

***Nota**: Neem waar die plasing van die gelyk aan tekens en die gebruik van simbole in die vorige voorbeelde.*



UITGEWERKTE VOORBEELD 6

Bepaal die volgende:

a) $f'(x)$ as $f(x) = (4x - 3)^2$

b) $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$

c) $D_x \left[\frac{x^2-x-6}{2x^2}\right]$

d) $D_x \left[\frac{3x^3-7x^2-6x}{3-x}\right]$

Oplossings

a) $f'(x)$ as $f(x) = (4x - 3)^2$

Hier moet ons eers uitbrei en vereenvoudig om hakkies te verwyder.

$f(x) = (4x - 3)^2$

$f(x) = 16x^2 - 24x + 9$

$f'(x) = 16 \times 2x^{2-1} - 24 + 0$

$\therefore f'(x) = 32x - 24$

b) $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$

Hier moet ons eers ontslae raak van die wortelvorm.

$y = \frac{3}{x^{\frac{1}{2}}}$

Ons moet nou kennis neem van die veranderlike in die noemer.

$y = 3x^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}x^{-\frac{3}{2}}$

c) $D_x\left[\frac{x^2-x-6}{2x^2}\right]$ met 1 term in die noemer ; breek dit op soos aangetoon.

$= D_x\left[\frac{x^2}{2x^2} - \frac{x}{2x^2} - \frac{6}{2x^2}\right]$

$= D_x\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{3}{x^2}\right]$

$= D_x\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{-1} - 3x^{-2}\right]$

$= 0 - \frac{1}{2}(-1)x^{-1-1} - 3(-2)x^{-2-1}$

$= \frac{1}{2}x^{-2} + 6x^{-3}$

d) $D_x\left[\frac{3x^3-7x^2-6x}{3-x}\right]$ met meer as 1 term in die noemer ; het nodig om die teller te faktoriseer.

$= D_x\left[\frac{x(3x^2-7x-6)}{3-x}\right]$

$= D_x\left[\frac{x(3x+2)(x-3)}{3-x}\right]$

$= D_x\left[\frac{x(3x+2)(x-3)}{-(x-3)}\right]$

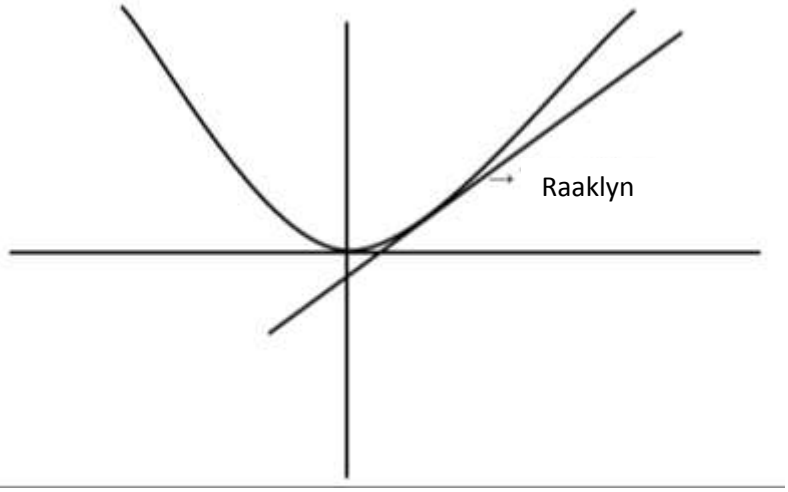
$= D_x\left[-x(3x+2)\right]$

$= D_x\left[-3x^2-2x\right]$

$= -6x - 2$

AFDELING 1.4 : Die Vergelyking van ’n Raaklyn aan die kurwe.

’n Raaklyn is ’n reguitlyn wat die kurwe by een punt raak. ’n Sentrale beginsel van Kalkulus/Differensiaal Rekene, is dat enige punt $x = a$ op die grafiek van ’n funksie, f, is die gradiënt van f by $x = a$ is dieselfde as die gradiënt van die raaklyn aan f by $x = a$. In ander woorde, $m_{raaklyn} = f'(a)$.



Hoe om die vergelyking van ’n raaklyn te bepaal.

Gegee die funksie $f(x)$ en die x – koördinaat van die raakpunt. Doen die volgende stappe:

1. Differensieer die gegewe funksie, $f'(x)$, vervang dan met gegewe x om gradiënt te verkry.
2. Vervang die gegewe x waarde in die oorspronklike vergelyking om die y-koördinaat van die raakpunt $(x_1 ; y_1)$ te verkry.
3. Vervang die bepaalde m en $(x_1 ; y_1)$ in $y - y_1 = m(x - x_1)$ en vereenvoudig.

UITGEWERKTE VOORBEELD 7

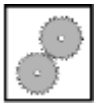
Bepaal die vergelyking van ’n raaklyn aan $f(x) = x^2 + x$ by die punt (1; 2)

$f'(x) = 2x + 1$

$m = f'(1) = 2(1) + 1$

$m = 3$

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 2 = 3(x - 1)$
$\therefore \quad y = 3x - 1$



UITGEWERKTE VOORBEELD 8

Die grafiek van $g(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ is gegee.

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek van g by die punt waar $x = -1$.

$g(-1) = -3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3(-1) + 5$

$= 13 \qquad (-1; 13)$

$g(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 5$

$\therefore g'(x) = -9x^2 + 4x - 3$

$m = g'(-1) = -9(-1)^2 + 4(-1) - 3$

$m = -16$

Daarom, is die vergelyking van die raaklyn:

$y - y_t = m_t(x - x_t)$

$y - 13 = -16(x - (-1))$

$y - 13 = -16(x + 1)$

$y - 13 = -16x - 16$

$y = -16x - 3$

Hoe om die koördinate van die raakpunt the bepaal.

Gegee die funksie $f(x)$ en die gradiënt. Doen die volgende 2 vervangings:

1. Vervang die gegewe gradiënt m in die afgeleide $f'(x)$ om die x koördinaat te kry.
2. Vervang die x koördinaat in $f(x)$ om die y – koördinaat van die raakpunt $(x_1 \; ; \; y_1)$ te kry.

Voorbeeld

Bepaal die raakpunt van die raaklyn met 'n gradiënt van 10 en die kurwe $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

Oplossing:

$f'(x) = 2x + 2$

$10 = 2x + 2$

$8 = 2x$

$4 = x$

$f(4) = (4)^2 + 2(4) - 1$

$= 23$

$\therefore$ Die raakpunt is $(4 \; ; \; 23)$

AFDELING 1.5 : DERDEGRAADSE FUNKSIE

HOE OM 'N DERDEGRAADSE FUNKSIE TE SKETS

Jy moet instaat wees om die derdegraadse funksie te skets, deur spesiale aandag aan die volgende sleutel kenmerke te gee.:

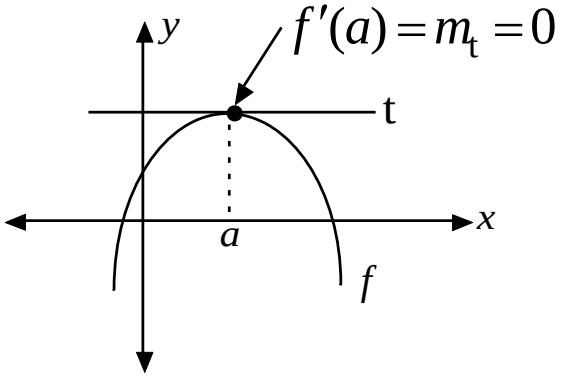
- Afsnitte (beide x en y afsnitte)
- Draaipunte (stasionêre punte)

Die afsnitte met die asse sowel as die draaipunte moet duidelik aangetoon word wannneer jy gevra word om 'n derdegraadse funksie te skets.

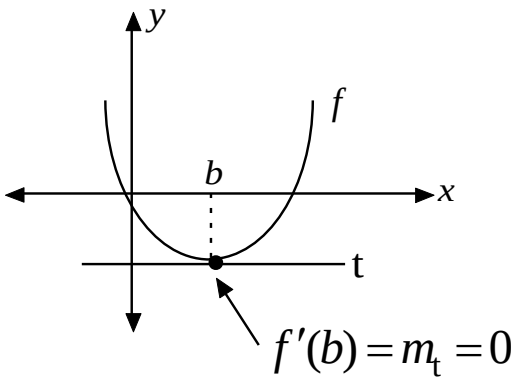
Koördinate van Draaipunte (Stationêre Punte)

By enige ***stationêre punt*** op 'n grafiek f, is die gradiënt gelyk aan nul(zero). As $x = a$ 'n stationêre punt is, dan is $f'(a) = 0$ omdat die gradiënt van die raaklyn by $x = a$ nul/zero is. (die lyn is horisontaal).

By 'n stationêre punt, neem die funksie nie toe of af nie / nie stygend of dalend nie.



By $x = a$ het ons 'n lokale ***maksimum***



By $x = b$ het ons 'n lokale ***minimum***.

Gegee die funksie $f(x)$ en moet dan die koördinate van die draaipunte vind, stel ons die volgende stappe voor:

Stap 1: Bepaals $f'(x)$

Stap 2: Stel $f'(x)$ gelyk aan 0, $f'(x) = 0$

Stap 3: Los op vir x

Stap 4: Vervang die waardes van x (in *Stap 3* bepaal) in die oorspronklike funksie, $f(x)$, om die ooreenkomstige $y-$waardes te verkry.

Stap 5: Jy het dit nou bemeester; jy moet die koördinate van die draaipunte neer skryf.

Infleksiepunt (Konkawiteit)

Infleksiepunt

Metode 1

- Stel die tweede afgeleide gelyk aan nul/zero. $f''(x) = 0$

1. Stel die tweede afgeleide gelyk aan nul en los op vir x. Jy het nou die x-waarde van die infleksiepunt.
2. Vervang die x-waarde in die oorspronklike vergelyking, b.v $f(x)$, om die ooreenkomstige y-waarde te kry en dus die koördinate van die infleksiepunt.

Metode 2

- Gebruik van koördinate van draaipunte. Die infleksiepunt lê halfpad tussen die draaipunte van die derdegraadse funksie.
- Vind die koördinate van die infleksiepunt deur die middelpunt van die draaipunte te bepaal.

***Konkaaf op*: $f''(x) > 0$**

***Konkaaf af*: $f''(x) < 0$**

Voorbeeld

Beskou die derdegraadse funksie $h(x) = 2x^3 + 4x^2 - 1$.

a) Bepaal die koördinate van die draaipunte.

b) Bepaal die koördinate van die infleksiepunt.

Oplossing:

a) $h(x) = 2x^3 + 4x^2 - 1$

$h'(x) = 6x^2 + 8x$

$6x^2 + 8x = 0$

$2x(3x + 4) = 0$

$2x = 0$ of $3x + 4 = 0$

$x = 0$ of $x = -\frac{4}{3}$

$h(0) = 2(0)^3 + 4(0)^2 - 1$ of $h(-\frac{4}{3}) = 2\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 1$

$h(0) = -1$ of $h(0) = \frac{37}{27}$

Daarom is die koördinate van die draaipunte:

$(0; -1)$ en $\left(-\frac{4}{3}; \frac{37}{27}\right)$

b) Koördinate van die infleksiepunt

$= \left(\frac{0+\left(-\frac{4}{3}\right)}{2}; \frac{-1+\frac{37}{27}}{2}\right) = \left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{27}\right)$

Faktorisering van ’n Derdegraadse Funksie

Verskillende metodes kan aangewend/gebruik word. Maak nie saak watter metode gebruik word om al die faktore te kry nie, is dit werd om kennis te neem dat dir faktorstelling ’n betekenisvolle rol speel om ten minste die eerste factor te kry.

Die faktorstelling meld dat as $f(a) = 0$; dan volg dit dat $(x - a)$ ’n faktor van $f(x)$ is.

Eksamen vrae kan slegs die faktorisering van die derdegraadse funksie verlang of om die *x*-afsnitte te bepaal.

Voorbeeld: Gegee: $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 14$.

a) Faktoriseer $f(x)$ volledig.
b) Bepaal die koördinate van die draaipunte.
c) Vir watter waardes van x is $f(x)$ konkaaf af ?

Oplossing:

a) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 14$

Vind ’n getal sodat wanneer dit in $f(x)$ vervang word, ons 0 kry.

$f(2) = (2)^3 - 8(2)^2 + 5(2) + 14$

$f(2) = 0 \Rightarrow (x - 2)$ is ’n faktor

$f(x) = (x - 2)(x^2 + bx - 7)$

Vervolgens; $bx^2 - 2x^2 \equiv -8x^2 \;\Rightarrow\; b - 2 = -8 \quad \therefore b = -6$

$f(x) = (x - 2)(x^2 - 6x - 7)$

$f(x) = (x - 2)(x - 7)(x + 1)$

b) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 14$

$f'(x) = 3x^2 - 16x + 5$

$3x^2 - 16x + 5 = 0$

$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$

$x = \frac{1}{3}$ of $x = 5$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{3}\right) + 14$ or $f(5) = (5)^3 - 8(5)^2 + 5(5) + 14$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{400}{27}$ of $f(5) = -36$

Daarom is die koördinate van die draaipunte:

$\left(\frac{1}{3}; \frac{400}{27}\right)$ en $(5; -36)$

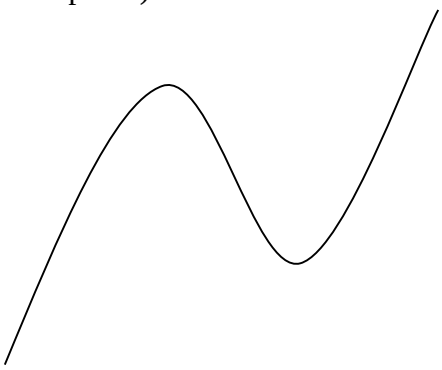
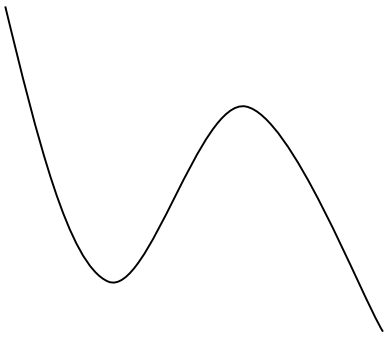
c) $f''(x) < 0$

$6x - 16 < 0 \quad \Rightarrow \quad 6x < 16 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{8}{3}$

Skets van Derdegraadse Funksie

Die standaardvorm van 'n derdegraaadse funksie word gegee deur: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Basiese vorms van die derdegraadse funksie.

Vorm as $a > 0$	**Vorm as $a < 0$**
Lokale maksimum en minimum draaipunte (stasionêre punte). 	Lokale maksimum en minimum draaipunte (stasionêre punte). 

Stappe om te volg om te skets:

N.B.: somtyds, indien nie altyd nie, sal jy deur die vrae gelei word waar om te begin.

1) Bepaal die x - en y - afsnitte
   a) Vir x –afsnit(te):
      i) Laat $y = 0$
      ii) Vind die faktore en los op vir x. (Faktorstelling is belangrik).
      iii) Bereken die ooreenkomstige y -waardes.
   b) Vir y -afsnit: Laat $x = 0$ en los op vir y
2) Bepaal die draaipunte
3) Skets

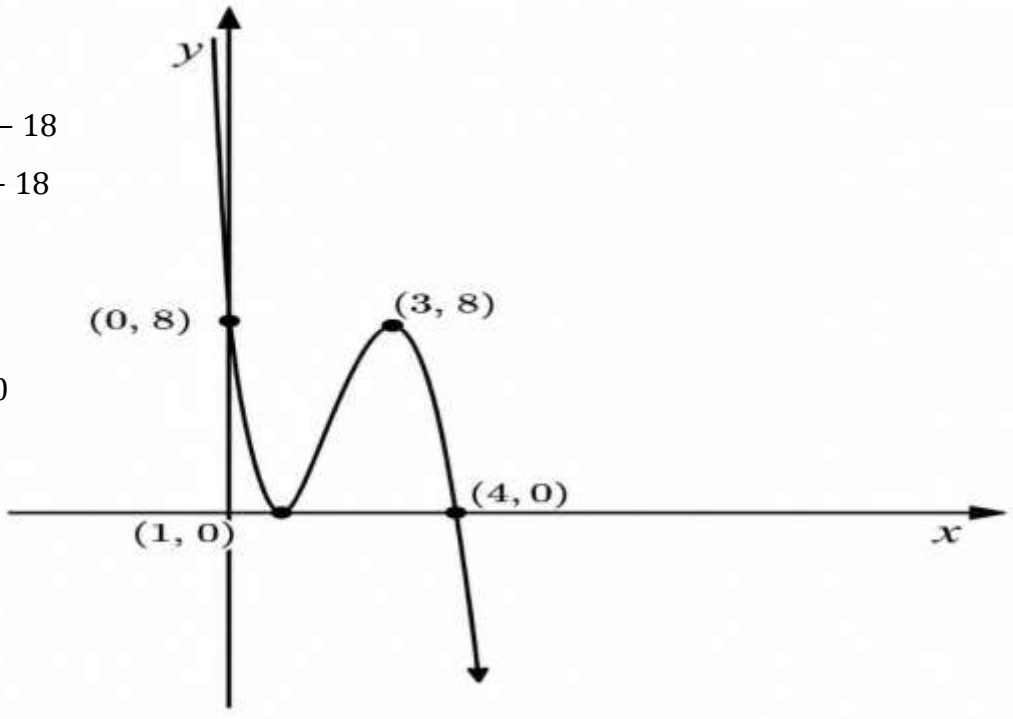
UITGEWERKTE VOORBEELD 10

Gegee die funksie $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x + 8$:

1. Bepaal die y –afsnit van f.
2. Toon aan dat $(x - 1)$ 'n faktor van f is.
3. Bepaal, vervolgens, die $x - afsnit$ van f.
4. Bepaal die koördinate van die draaipunte.
5. Skets die grafiek van f, toon die afsnitte met die asse sowel as die draaipunte duidelik aan.

Oplossing:

1. $f(0) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 18(0) + 8$
   $= 8$ $(0\,;8)$
2. $f(1) = -2(1)^3 + 12(1)^2 - 18(1) + 8$
   $= 0$ $(1\,;0)$
3. $0 = (x-1)(-2x^2 + 10x - 8)$
   $x - 1 = 0$ or $-2x^2 + 10x - 8 = 0$
   $x = 1$ of $x^2 - 5x + 4 = 0$
   $x = 1$ of $(x-4)(x-1) = 0$
   $x = 1$ of $x = 4$ or $x = 1$
   $(1\,;0)$ en $(4:0)$
4. $f'(x) = -6x^2 + 24x - 18$
   $0 = -6x^2 + 24x - 18$
   $0 = x^2 - 4x + 3$
   $0 = (x-3)(x-1)$
   $x = 3$ of $x = 1$
   $f(3) = 8$ en $f(1) = 0$
   $(3:8)$ en $(1;0)$
5. Skets



BEPALING VAN DIE VERGELYKING VAN 'N DERDEGRAADSE FUNKSIE

Dit is belangrik om kennis te neem dat die aantal voorwaardes wat in die vrae gegee word, ten minste gelyk moet wees aan die konstaantes wat bepaal moet word om sommige vergelykings te formuleer. Voorwaardes word gewoonlik in die vorm van koördinate gegee, wat afsnitte, draaipunte of enige ander punte op die grafiek van die funksies kan wees.

Vorms van die derdegraadse funksie:

Standaardvorm: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

3 afsnitte vorm: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Waar; x_1, x_2 en x_3 die $x-$afsnitte is

2 afsnitte vorm: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)^2$

Waar; x_1 slegs 'n $x - afsnit$ is en x_2 is beide 'n $x-$afsnit en 'n draaipunt.

Die draaipunt en die die kontak/raakpunt van raaklyne verskaf meer as 1 voorwwaarde. Met die draaipunt of die raakpunt van die grafiek en 'n raaklyn, kan ons maklik meer as 1 vergelyking saamstel.

As koördinate van 'n draaipunt van f(x) gegee is (2 voorwaardes)

Die koördinate paar kan in $f(x)$ vervang word.

i. Die $x-$koördinaat kan in $f'(x)$ vervang word en gelyk stela an nul/zero.

As die koördinate van 'n kontakpunt van $f(x)$ gegee word en die raaklyn (2 kondisies/voorwaardes):

i. Die koördiante paar kan in $f(x)$ vervang word.

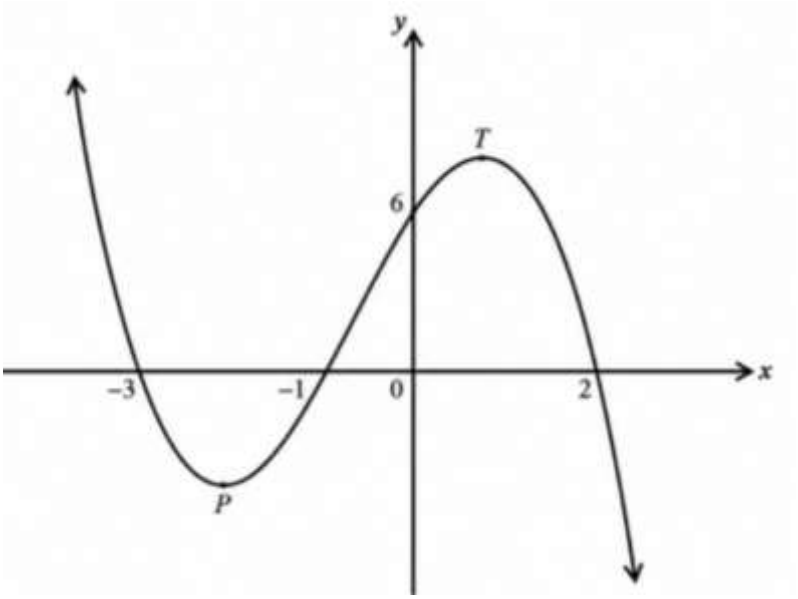
ii. Die $x-$koördinaat kan in $f'(x)$ vervang word en stel gelyk aan die gradiënt van die raaklyn by die kontak/raakpunt.

As enige ander koördinate op $f(x)$ gegee word

i. Die koördinate paar kan in $f(x)$ vervang word.

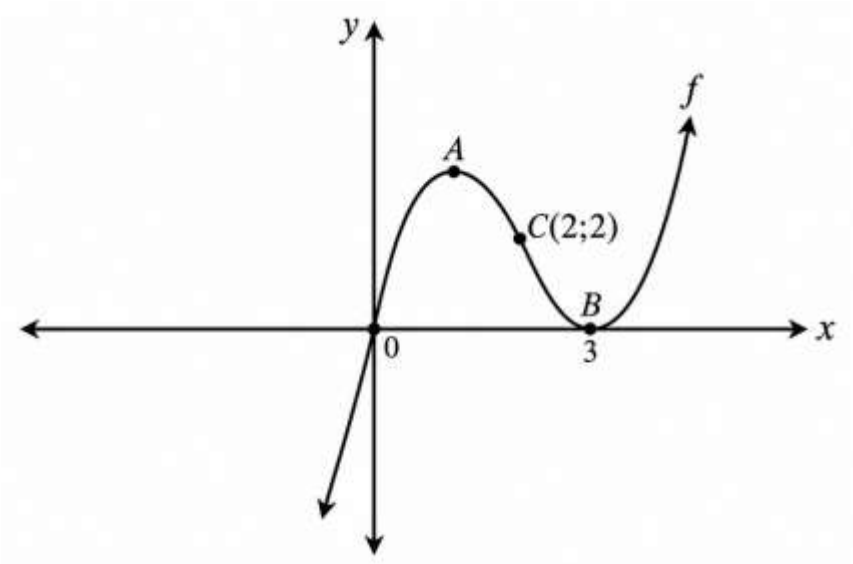
UITGEWERKTE VOORBEERLD 11

1. Die skets hieronder stel die grafiek van f gedefinieer deur $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$. $P\ en\ T$ is die draaipunte van f. Die x-afsnitte van die grafiek is $-3, -1\ en\ 2$. Die grafiek het 'n y-afsnit by 6. Bepaal die waardes van $a, b\ en\ c$.



2. Die skets hieronder stel die grafiek van f gedefinieer deur $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$. A en B is die draaipunte van f. B (3;0) is ook die x – afsnit van f. C is 'n punt met koördinate (2;2).

   Die grafiek gaan deur die oorsprong.



Oplossings

1.

$$y = -(x+3)(x+1)(x-2)$$
$$y = -(x^3 + 2x^2 - 5x - 6)$$
$$= -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$$
$$a = -2;\ b = 5;\ c = 6$$

2.

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)^2$$
$$2 = a(2-0)(2-3)^2$$
$$2 = a(2)(1)^2$$
$$a = 1$$
$$y = 1(x)(x-3)^2$$
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Verwante Sleutel Kenmerke van f, f' en f'' aan mekaar

1. Die waarde van die x −afsnit van f'' is dieselfde as die x-waarde van die koördinate van die draaipunt van f'. Dit is ook die x-waarde van die infleksie punt van f.

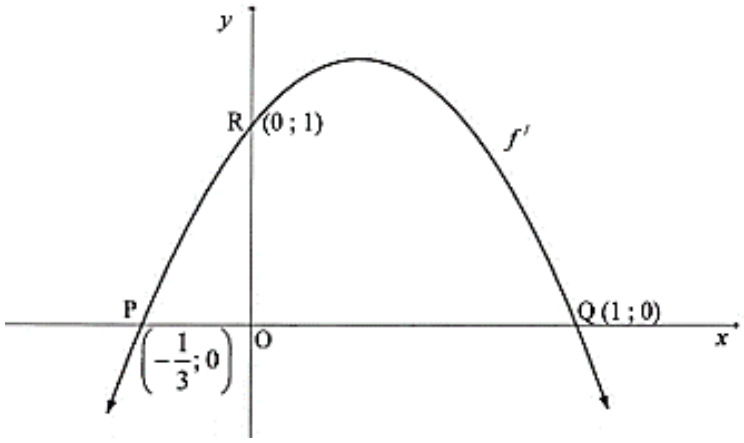
2. Die waarde van x-afsnitte van f' is dieselfde as die x-waardes van die koördinate van die draaipunte van f.

UITGEWERKTE VOORBEELD 12

Die grafiek van $y = f'(x) = mx^2 + nx + k$ is hieronder geteken.

Die grafiek gaan deur die punte $P\left(-\frac{1}{3}; 0\right), Q(1; 0)$ en $R(0; 1)$.

Bepaal die waardes van m, n en k.



Oplossing:

$$f'(x) = mx^2 + nx + k$$

$$f'(x) = m\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)$$

$$1 = m\left(0 + \frac{1}{3}\right)(0-1)$$

$$1 = -\frac{1}{3}m$$

$$\therefore m = -3$$

$$f'(x) = -3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x-1)$$

$$f'(x) = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right)$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

$$\therefore n = 2$$

$$\therefore k = 1$$

AKTIWITEITE

AFDELING 1: KALKULUS (DIFFERENSIAAL REKENE)

AKTIWITEIT 1

Bepaal $f'(x)$, vanuit eerste beginsels:

1. $f(x) = 5$
2. $f(x) = mx + c$
3. $f(x) = -x^2 - x$
4. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$
5. $f(x) = px^2 - qx + r$
6. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$
7. $f(x) = 2x^3$
8. $f(x) = -\frac{2}{x}$

AKTIWITEIT 2

Bepaal:

2.1 $\frac{d}{dx}(\pi^2)$

2.2 $D_x\left(x^4 - \sqrt[3]{x}\right)$

2.3 $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{x^5+2}{x^2}$

AKTIWITEIT 3

Bepaal ELK van die volgende:

3.1 $\frac{dA}{dr}$ as $A = \pi r^2$

3.2 $D_x\left[\left(x - \sqrt{x}\right)^2\right]$

AKTIWITEIT 4

Bepaal:

4.1 $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{2x^2-x-6}{2x+3}$

4.2 $f'(x)$ as $f(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{x}{\sqrt{x}}$

4.3 $\frac{dy}{dx}$ as $y = a^2x + 6\sqrt{x}$

4.4 $g'(x)$ as $g(x) = (x+7)^3$

4.5 $\frac{dq}{dp}$ as $9p^2 - 3pq - q = 1$

AKTIWITEIT 5

Bepaal:	
5.1	$D_x[x^3 + 3x^2 - 6x + 5]$
5.2	$m'(x)$ as $m(x) = \frac{1}{x} + \frac{3x}{4}$
5.3	$f'(x)$ as $f(x) = \frac{x^3-27}{x^2-3x}$
5.4	$\frac{dx}{dy}$ as : $\sqrt[3]{y}.x = 2y^2 + 3$

AKTIWITEIT 6

6.1 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die volgende kurwes by 'n gegewe waarde van x.

6.1.1 $y = x^2 - x - 6$ by $x = 1$

6.1.2 $y = -\frac{6}{x}$ by $x = -2$

6.2 Die raaklyn aan die kurwe van $g(x) = 2x^3 + px^2 + qx - 7$ by $x = 1$ het die vergelyking $y = 5x - 8$.

6.2.1 Toon aan dat (1; –3) die raakpunt van die raaklyn aan die grafiek van g is.

6.2.2 Bereken, vervolgens, die waardes van p en q.

6.3 Vir watter waarde van x is die raaklyn aan die kurwe $y = x^2 + 3x - 5$ ewewydig aan die lyn $3y + 2x = 6$?

AKTIWITEIT 7

1. Skets die grafiek van $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$. Toon al die afsnitte met die asse sowel as die stasionêre punte duidelik aan.

AKTIWITEIT 8

Gegee: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$

8.1 Skryf die y – afsnit van f neer.

8.2 Toon aan dat 2 'n wortel van die vergelyking $f(x) = 0$ is.

8.3 Faktoriseer, vervolgens, $f(x)$ volledig.

8.4 As dit verder gegee word dat die koördinate van die draaipunte ongeveer by $(0{,}7\,;\,-12{,}6)$ en $(-3{,}4\,;\,20{,}8)$ is, teken 'n sketsgrafiek van f en gee byskrifte vir al die afsnitte met die asse en die draaipunte.

8.5 Gebruik jou grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor $f'(x) < 0$.

AKTIWITEIT 9

Skets die grafiek van $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ as:

- $f'(-3) = f'(5) = 0$
- $f(-3) = 5$ en $f(5) = -3$
- f het drie ongelyke wortels.

(Toon die koördinate van die draaipunte en die infleksiepunt duidelik aan.)

AKTIWITEIT 10

Die funksie t word gedefinieer deur $t(x) = 2x^3 + bx + c$ en het die volgende eienskappe.

- $t(-3) = t(3) = t(0) = 0$
- $t'(-1{,}5) = t'(1{,}5) = 0$

Gebruik die inligting om 'n netjiese skets met byskrifte van *t* te teken, sonder om vir *b* en *c* op te los.

AKTIWITEIT 11

Die volgende inligting van 'n derdegraadse polinoom, $y = f(x)$ is gegee:

- $f(-1) = 0$
- $f(2) = 0$
- $f(1) = -4$
- $f(0) = -2$
- $f'(1) = f'(-1) = 0$
- as $x < -1$ dan is $f(x) > 0$
- as $x > 1$ dan is $f(x) > 0$

11.1 Gebruik die inligting om 'n netjiese sketgrafiek van f te teken.

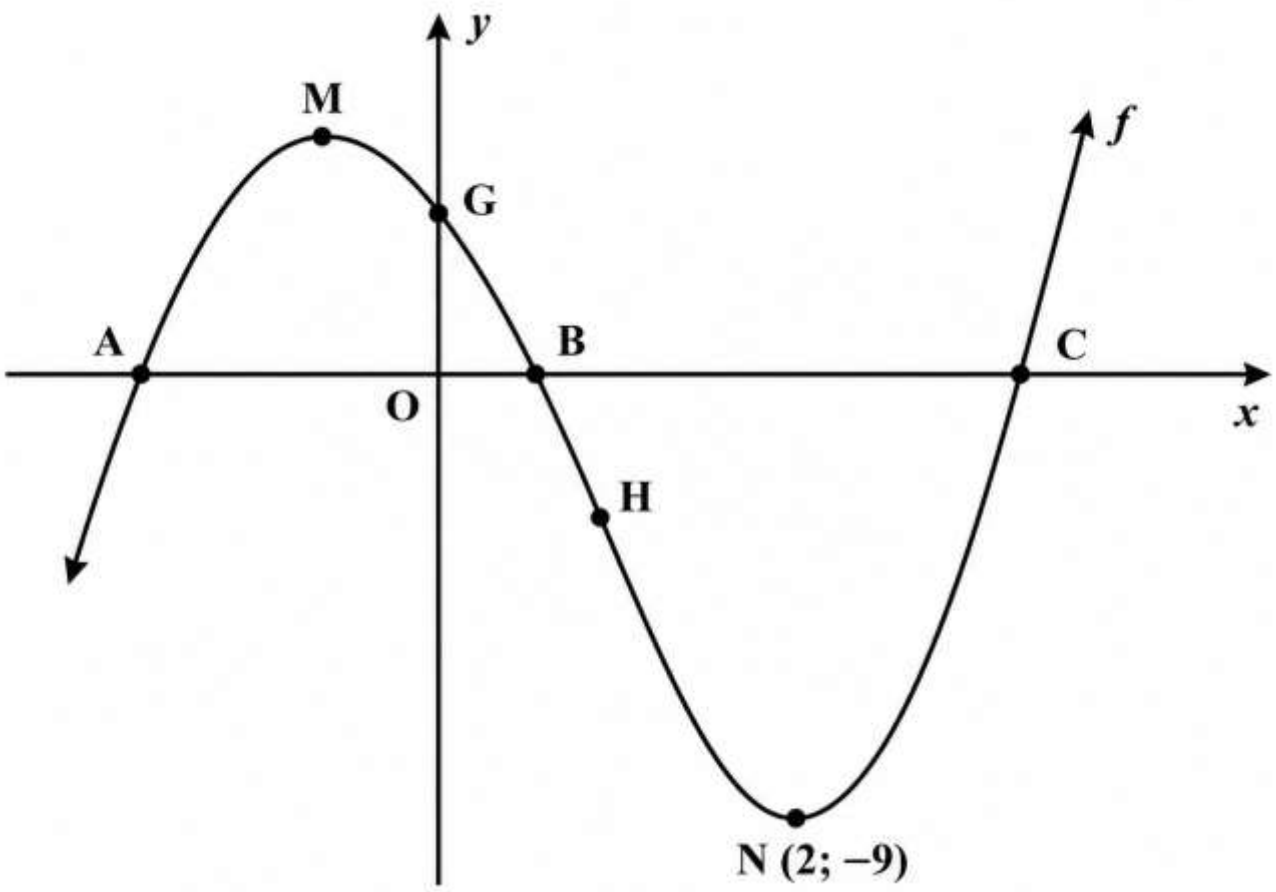
11.2 Vir watter waardes van x is f stygend/toenemend?

11.3 Gebruik jou grafiek om die x– koördinaat van die infleksiepunt van f te bepaal.

11.4 Vir watter waardes van x is f konkaaf op?

AKTIWITEIT 12

Die funksie $f(x) = 2x^3 + px^2 + qx + 3$ is hieronder geteken. N$(2; -9)$ en M is die draaipunte van f.
G is die $y-$afsnit van f en A, B en C is die x- afsnitte van f.



12.1 Toon aan dat $p = -5$ en $q = -4$

12.2 Bepaal die koördiante van G, die y-afsnit van f.

12.3 As dit gegee word dat C(3;0) is, bereken die afstand tussen A en B, die x-afsnitte.

12.4 Bereken die x-koördinaat van M, 'n draaipunt van f.

12.5 Bepaal die x-koördinaat van H, die infleksiepunt van f.

12.6 Vir watter waarde(s) van x sal f konkaaf op wees?

12.7 Vir watter waarde(s) van x is $f(x).f'(x) < 0$?

AFDELING 2: ANALITIESE MEETKUNDE

2.1 Graad 11 hersiening

Die **Afstand** van die lyn **AB** tussen twee punte **A** en **B** sal gegee word deur:

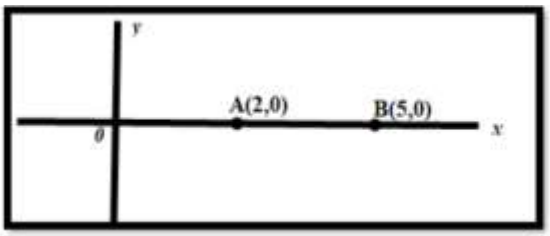
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

NOTA: As die lyn **AB**, **Vertikaal** is, dan neem ons net $y - waardes$ van die punte in ag, d.w.s.

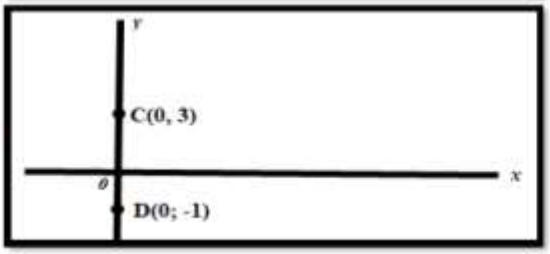
$$d_{CD} = y_{top} - y_{bottom}$$

As die lyn **AB, Horisontaal** is, dan kyk ons net na die $x - waardes$ van die punte,

$$d_{AB} = x_{right} - x_{left}$$

- 

$AB = x_B - x_A$

- 

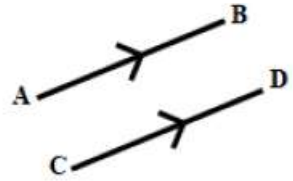
$CD = y_C - y_D$

Die standaardvorm van die reguitlyn grafiek is **($y = mx + c$),** sowel as die bepaling van die vergelyking vanaf die gegewe informasie (skets of koördinate van punt/e). En om alternatiewe formules toe te pas.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ **en** $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

- **Gradiënte**

A) EWEWYDIGE LYNE



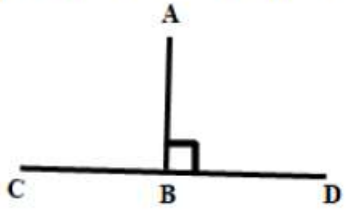
$m_{AB} = m_{CD}$

Wanneer die vergelykings vir // lyne gegee
Vergelyking van lyn AB

$y = 2x + 3$
$m_{AB} = 2$

Vergelyking van die lyn CD
$y - 2x = 5$
$y = 2x + 5$
$m_{CD} = 2$

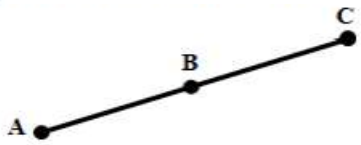
B) LOODREGTE LYNE



If $m_{AB} \times m_{CD} = -1$
AB ⊥ CD
$A\hat{B}D = 90^{\circ}$

Wanneer die vergelykings vir ⊥ lyne gegee
Vergelyking van die lyn AB
$y = 2x + 1$
$m_{AB} = 2$
Vergelyking van die lyn CD
$2y = -x + 4$
$y = -\frac{1}{2}x + 2$
$m_{CD} = -\frac{1}{2}$
$m_{AB} \times m_{CD} = -1$

C) SAAMLYNIGE PUNTE



$m_{AB} = m_{BC} = m_{AC}$

Bereken die waarde van q as K(– 6 ; 9) , L(–3 ; q) en M(–2 ; –1) saamlynig is.

Wanneer die gradiënte van lyne gelyk is, dan is die lyne eweydig.

($m_{AB} = m_{CD}$; ∴ AB ∥ CD)

As die produk van gradiënte gelyk aan -1 is, dan is die twee lyne loodreg op mekaar.

$m_{AB} \times m_{CD} = -1$= ∴ **AB ⊥ CD)**

- Inklinasiehoek

'n Ander alternatief om die **gradiënt** van 'n lyn te bepaal, is om die **Inklinasiehoek** te gebruik:

$$\tan\theta = m_{line}$$

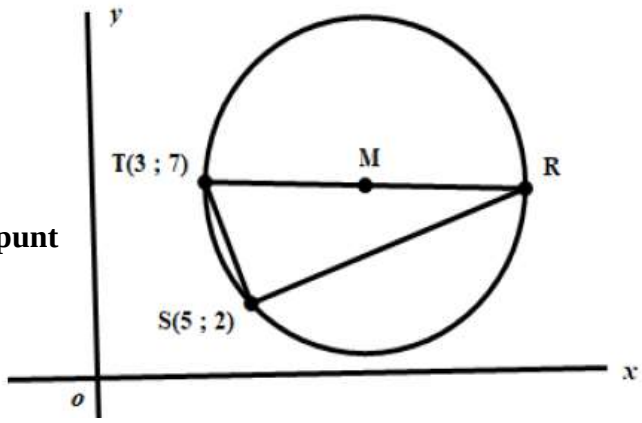
- Die **Middelpunt, M** van die lyn **AB** sal gegee word deur:

$$M(x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2})$$

Waar $(x_M; y_M)$ die $x\ en\ y$ waardes van die middelpunt is.

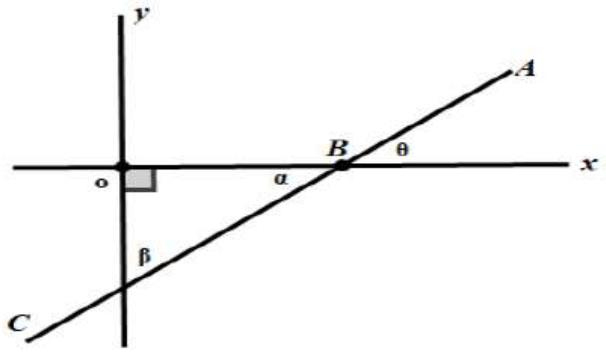
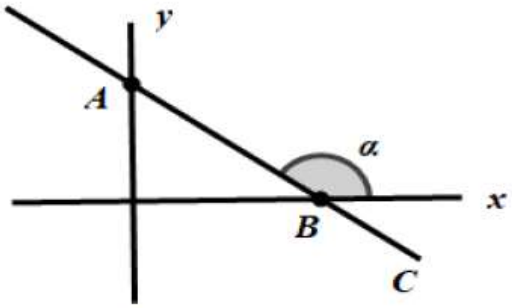
$$\mathbf{M}\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \; ; \; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

- **Bepaal die middelpunt van TS.**
- **As M(9 ; 6½) die middelpunt van TR is, Bereken die koördinate van R.**



5. INKLINASIEHOEK

- $\boldsymbol{tan\,\theta = m}$, waar $\boldsymbol{m}$ die gradiënt is.
- Dit is altyd tussen **0° en 180°**.
- 'n Hoek gemeet vanaf die horisontale lyn of vanaf die x- as. As die nie vanaf die horisontale lyn is nie, teken 'n lyn vanaf die horisontale lyn om die inklinasiehoek te kry.

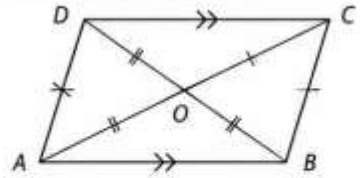
As $m > 0$ => Inklinasie $\angle$: $0^o < \theta < 90^o$	**As $m < 0$ => Inklinasie $\angle$:** $90^o < \theta < 180^o$
	
$\tan\theta = m_{AB}$ ➢ $\theta = \tan^{-1}(m_{AB})$ ***skerp*** $\angle$ $\theta = \alpha$ (*regoorstaande* $\angle e$)	$\tan\alpha = m_{AB}$ $\alpha = \tan^{-1}(m_{AB})$ ***stomp*** $\angle$ ➢ $\alpha = 180^o$ - verw.$\angle$ As jy 'n negatiewe inklinasiehoek kry, tel 180^o by.

Jy moet die volgende eienskappe van die volgende vierhoeke leer.

EIENSKAPPE VAN SPESIALE VIERHOEKE

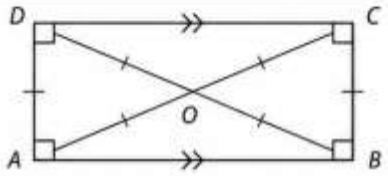
PARALLELOGRAM

- **Albei pare oorstaande sye is ewewydig**
- **Albei pare oorstaande sye is gelyk**
- **Albei pare oorstaande hoeke is gelyk**
- **Hoeklyne halveer mekaar**



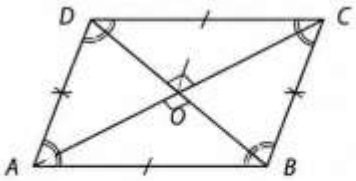
REGHOEK

- **Al die eienskappe van parallelogram : PLUS**
- **Albei hoeklyne is ewelank**
- **Al binne hoeke is gelyk aan 90°**



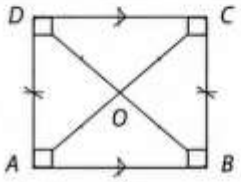
RUIT / ROMBUS

- **Al die eienskappe van parallelogram : PLUS**
- **Alle sye is ewelank**
- **Hoeklyne halveer mekaar loodreg**
- **Hoeklyne halveer binne hoeke**



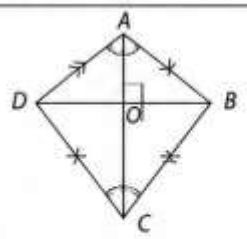
VIERKANT

- **Al die eienskappe van RUIT/ROMBUS : PLUS**
- **Hoeklyne is ewelank**
- **Al binne hoeke is gelyk aan 90°**



VLIEëR / "KITE"

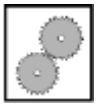
- **Twee pare aanliggende sye is gelyk/ewelank**
- **Hoeklyn tussen gelyke sye halveer ander hoeklyn**
- **Een paar oorstaande hoeke is gelyk (ongelyke sye)**
- **Hoeklyn tussen gelyke sye halveer binne hoeke (is simmetrie-as)**
  Hoeklyne snv loodreg



TRAPEZIUM

- **Een paar oorstaande sye is ewewydig**





UITGEWERKTE VOORBEELD 1

1. As die punte $A(6;5), \mathrm{B}(3;2)$ en $\mathrm{C}(2k;k+4)$ gegee is sodat $\mathrm{AB} \perp \mathrm{BC}$, bereken, vervolgens, die waarde van k.
2. $P(2\ ;\ 8), \mathrm{Q}(4\ ;\ y)$ en $\mathrm{R}(x\ ;\ 0)$ is die gegewe punte op lyn segment PR. Bepaal x en y as Q die middelpunt van PR is.
3. Die punte $A(1\ ;\ 2), \mathrm{B}(p-1\ ;\ 3)$ en $\mathrm{C}(-3\ ;\ -6)$ is saamlynig/ko-linieêr. Bepaal p.

Oplossing:

1. $m_{\mathrm{AB}} \times m_{\mathrm{BC}} = -1$

$\therefore \frac{2-5}{3-6} \times \frac{(k+4)-2}{2k-3} = -1$

$\therefore \frac{-3}{-3} \times \frac{k+2}{2k-3} = -1$

$\therefore 1 \times \frac{k+2}{2k-3} = -1$

$\therefore \frac{k+2}{2k-3} = -1$

$\therefore k+2 = -2k+3$

$\therefore 3k = 1$

$\therefore k = \frac{1}{3}$

2.

$4 = \frac{2+x}{2}$ en $y = \frac{0+8}{2}$

$\therefore x = 6$ en $y = 4$

3.

$m_{\mathrm{AB}} = m_{\mathrm{BC}}$

$\therefore \frac{3-2}{p-1-1} = \frac{-6-3}{-3-(p-1)}$

$\therefore \frac{1}{p-2} = \frac{-9}{-3-p+1}$

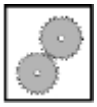
$\therefore \frac{1}{p-2} = \frac{-9}{-p-2}$

$\therefore -p-2 = -9(p-2)$

$\therefore -p-2 = -9p+18$

$\therefore 8p = 20$

$\therefore p = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$



UITGEWERKTE VOORBEELD 2

Die vergelyking van 'n lyn word gedefinieer deur: $y = (2k - 3)x + 12$.

Bepaal die waarde van k as:

2.1 die lyn ewewydig is aan $y = 4x + 7$.

2.2 die lyn ewewydig is aan die *x*-as.

2.3 die lyn deur die punt $(-3\ ;\ 4)$ gaan.

Oplossing:

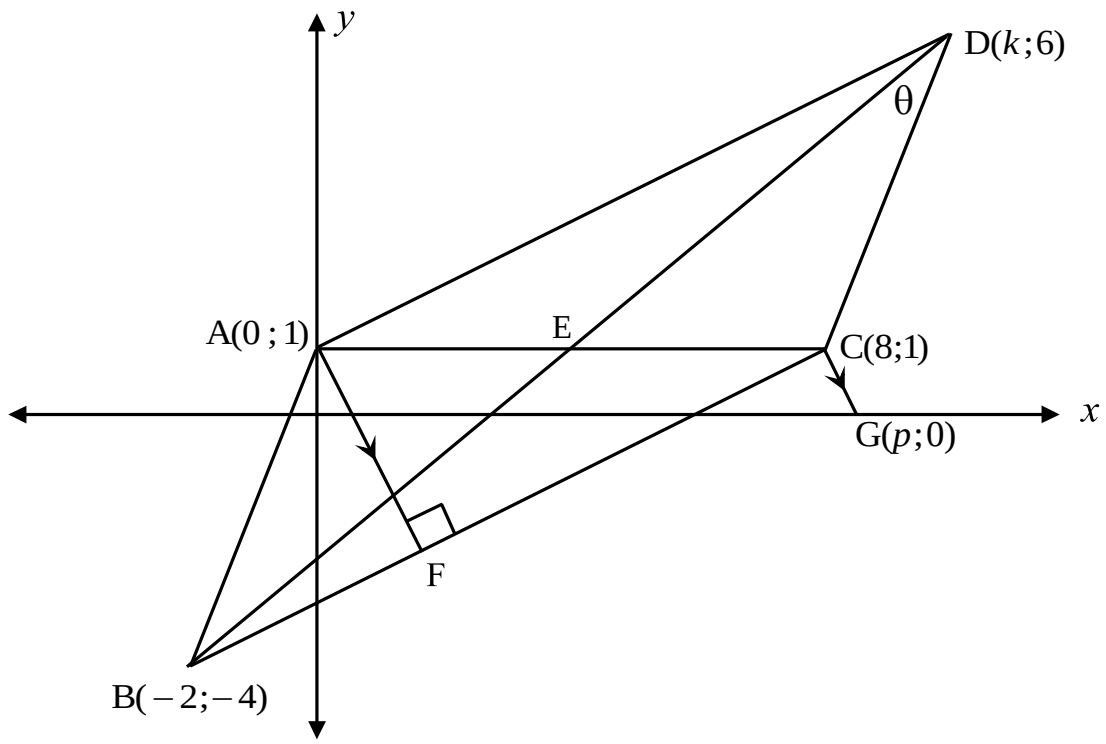
2.1 $2k - 3 = 4$
$\therefore 2k = 7$
$\therefore k = \frac{7}{2}$

2.2 $2k - 3 = 0$
$\therefore 2k = 3$
$\therefore k = \frac{3}{2}$

2.3 $4 = (2k - 3)(-3) + 12$
$\therefore 4 = -6k + 9 + 12$
$\therefore 6k = 17$
$\therefore k = \frac{17}{6}$

UITGEWERKTE VOORBEELD 3

In die figuur hieronder, is ABCD 'n parallelogram met hoekpunte $A(0\ ;\ 1)$, $B(-2\ ;\ -4)$, $C(8\ ;\ 1)$ en $D(k\ ;\ 6)$. AF is loodreg op BC en ewewydig aan CG. E is die snypunt van die hoeklyne van ABCD.



Bepaal :

3.1 die lengte van BC in eenvoudigste wortelvorm.

3.2 die gradiënt van BC.

3.3 die vergelyking van AF.

3.4 die koördinate van E.

3.5 die waarde van *k*.

3.6 die waarde van *p*.

3.7 die grootte van θ afgerond tot twee desimale plekke.

Oplossing:

3.1 $\text{BC}^2 = (8-(-2))^2 + (1-(-4))^2$

$\therefore \text{BC}^2 = 125$

$\therefore \text{BC} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

3.2 $m_{\text{BC}} = \dfrac{1-(-4)}{8-(-2)} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

3.3 $m_{\text{AF}} = -2$

$y-$ afsnit van AF is 1

$\therefore y = -2x + 1$

3.4 $x_E = \dfrac{0+8}{2} = 4 y_E = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$E(4\ ;\ 1)$

3.5 $4 = \dfrac{-2+k}{2}$

$\therefore 8 = -2 + k$

$\therefore k = 10$

3.6 $m_{\text{CG}} = m_{\text{AF}} = -2$

$\therefore \dfrac{0-1}{p-8} = -2$

$\therefore -1 = -2(p-8)$

$\therefore -1 = -2p + 16$

$\therefore 2p = 17$

$\therefore p = \dfrac{17}{2}$

3.7 $tan\,\alpha = m_{\text{DC}} = \dfrac{6-1}{10-8} = \dfrac{5}{2}$

$tan\,\alpha = \dfrac{5}{2}$

$\therefore \alpha = 68{,}19859051°$

$tan\,\beta = m_{\text{DB}} = \dfrac{6-(-4)}{10-(-2)} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

$tan\,\beta = \dfrac{5}{6}$

$\therefore \beta = 39{,}80557109°$

$\alpha = \theta + \beta$

$\therefore \alpha - \beta = \theta$

$\therefore \theta = 68{,}19859051° - 39{,}80557109°$

$\therefore \theta = 28{,}39°$

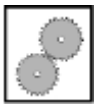
DIE SIRKEL ANALISE

Die vergelyking van 'n sirkel met **middelpunt** $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ en **radius** $\boldsymbol{r}$ is $\boldsymbol{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2}$

Die bostaande vergelyking is in **middelpunts-vorm.** 'n Ander vorm van 'n sirkel se vergelyking met enige middelpunt is $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$, wat die **algemene vorm** is.

Deur die middelpunts-vorm vergelyking uit te vermenigvuldig gee vir ons die algemene vorm.

Netso, deur die algemene vorm te manipuleer deur **vierkantsvoltooiing** vir beide x en y herlei die vergelyking terug na middelpunts-vorm.



UITGEWERKTE VOORBEELD 4

1. Bepaal die koördinate van die middelpunt en die lengte van die radius vir elk van die volgende sirkels.

a) $(x-5)^2+(y+3)^2=9$

Middelpunt: $(5;-3)$ en $r^2=9$

$r=3$

2. Gegee $x^2+y^2+2x-6y-6=0$, bepaal die middelpunt en die radius van die sirkel.

$x^2+2x+y^2-6y=6$

Voltooi die vierkant vir die uitdrukking in x en y afsonderlik :

$$x^2+2x+\left(2\times\frac{1}{2}\right)^2+y^2-6y+\left(-6\times\frac{1}{2}\right)^2=6+\left(2\times\frac{1}{2}\right)^2+\left(-6\times\frac{1}{2}\right)^2$$

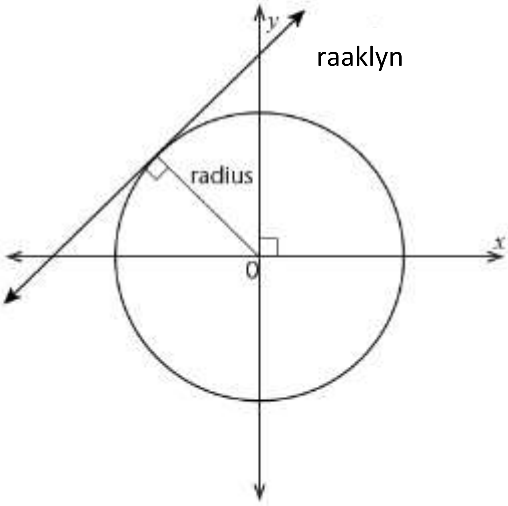
$x^2+2x+1+y^2-6y+9=16$

$(x+1)^2+(y-3)^2=16$

Middelpunt: $(-1;3)$ en $r^2=16, \therefore r=4$

DIE VERGELYKING VAN 'N RAAKLYN

'n Raaklyn is 'n lyn wat die sirkel by slegs een punt raak. Selfs as dit verleng word, sal die nie weer die sirkel raak/sny nie.



- Die raaklyn is altyd loodreg op die radius by die raakpunt. Dit beteken dat die hoek tussen die radius en raaklyn is gelyk aan 90^o

  Daarom, $m_{rad} \times m_{rkl} = -1 \; (radius \perp raaklyn) \leftrightarrow (rad \perp rkl)$.

UITGEWERKTE VOORBEELD 5

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel gedefinieer deur $x^2 + y^2 = 2$ by 'n punt $(-1 \; ; \; 1)$.

1. $m_{rad} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

   $m_{rad} = \frac{0 - 1}{0 - (-1)}$

   $m_{rad} = -1$

   $m_{rkl} = \frac{-1}{m_{rad}}$

   $m_{rkl} = \frac{-1}{-1}$ $\therefore \; m_{rkl} = 1$

   $y - y_1 = m(x - x_1)$

   $y - 1 = 1\big(x - (-1)\big)$

   $y - 1 = x + 1$

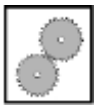
   $y = x + 2$

SNYPUNT

Die snypunt van ’n sirkel en ’n reguitlyn is ’n punt waar die sirkel en die lyn ontmoet (waar hulle gelyk is)

Ons los die vergelykings gelyktydig op om die koördinate van die snypunt te bepaal.

’n Lyn segment wat deur die sirkel sny (twee snypunte) word ’n snylyn genoem. ’n Lyn segment wat die sirkel raak (een raakpunt) word ’n raaklyn genoem.



UITGEWERKTE VOORBEELD 6

Bepaal die snypunt(e) van die lyn $x + y = 2$ en die sirkel $x^2 + y^2 = 2$

Oplossing:

$x + y = 2$ ……..…verg. 1

$x^2 + y^2 = 2$……..… verg. 2

Vanaf verg. 1 $x = 2 - y$ …..…verg. 3

Vervang verg. 3 in verg. 2

$(2 - y)^2 + y^2 = 2$

$4 - 4y + y^2 + y^2 - 2 = 0$

$2y^2 - 4y + 2 = 0$

$y^2 - 2y + 1 = 0$

$(y - 1)(y - 1) = 0$

$y = 1$

$x = 1 \qquad (1\ ;\ 1)$

2.1 Die Sny/Raak/Interseksie van sirkels analise

Om te bepaal of daar ’n interseksie tussen twee sirkels is of nie. As hulle inwendig by een punt raak of uitwendig, moet ons die afstand (d) tussen die middelpunte van die twee sirkels bepaal en dit vergelyk met die som ($r_1 + r_2$) van die radiusse van die twee sirkels.

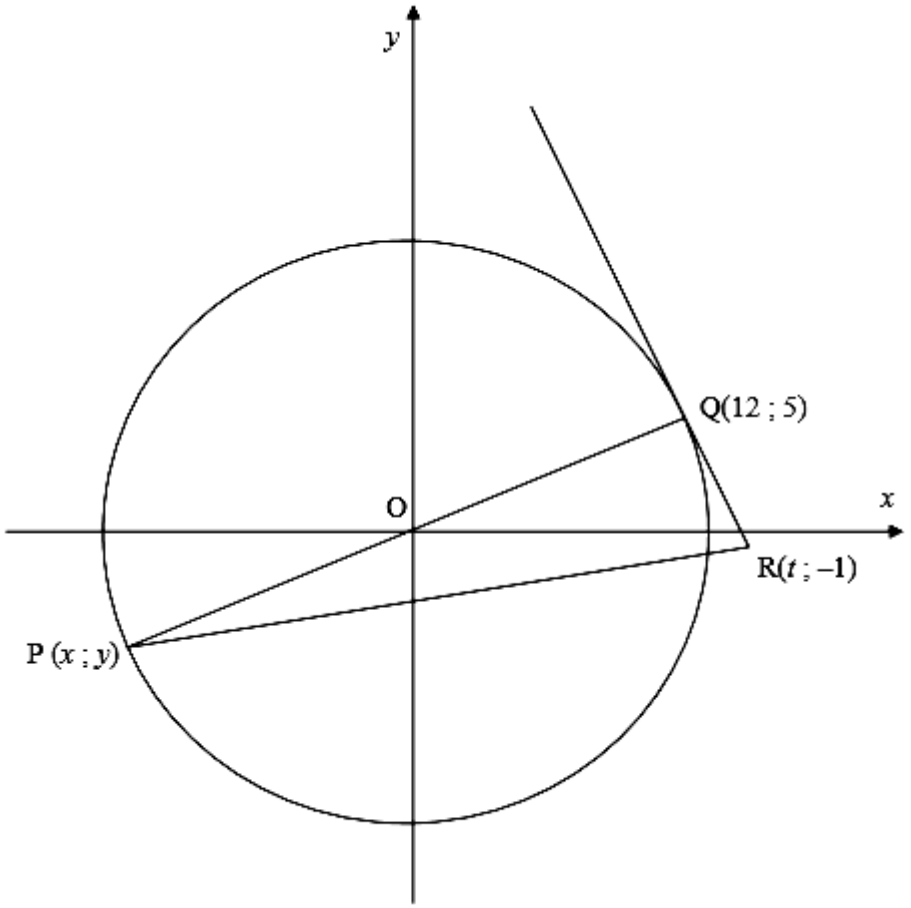
- As $d < r_1 + r_2$, dan sny die twee sirkels mekaar.
- As $d = r_1 + r_2$, dan raak die sirkels net by een punt.
- As $d > r_1 + r_2$, dan is daar geen interseksie/snypunte tussen die twee sirkels nie.

Somtyds sal jy gevra word om te bepaal of ’n punt, p binne, buite of op die sirkel lê. Ons moet die afstand (d) tussen die middelpunt en die punt bepaal.

- As $d < r$, dan lê die punt binne die sirkel.
- As $d = r$, dan lê die punt op die omtrek van die sirkel.
- As $d > r$, dan lê die punt buite die sirkel.

UITGEWERKTE VOORBEELD 7

O is die middelpunt van die sirkel in die figuur hieronder. $P(x;y)$ en $Q(12;5)$ is twee punte op die sirkel. POQ is 'n reguit lyn. Die punt $R(t;-1)$ lê op die raaklyn aan die sirkel by Q.



7.1 Bepaal die vergelyking van die sirkel.

7.2 Bepaal die vergelyking van die reguitlyn deur P en Q.

7.3 Bepaal x en y, die koördinate van P.

7.4 Toon aan dat die gradiënt van QR, $-\frac{12}{5}$ is.

7.5 Bepaal die vergelyking van die raaklyn QR in die vorm $y = \ldots$

7.6 Bereken die waarde van t.

7.7 Bepaal 'n vergelyking van die sirkel met middelpunt Q(12;5) en wat deur die oorsprong gaan.

Oplossing:

7.1 $d_{OQ} = \sqrt{(12-0)^2 + (5-0)^2}$

$r = \sqrt{169} = 13$

$\therefore (x-0)^2 + (y-0)^2 = (13)^2$

$x^2 + y^2 = 169$

7.2 $m_{PQ} = \frac{5-0}{12-0} = \frac{5}{12}$

$\therefore y = \frac{5}{12}x$

7.3 P(-12;-5)

7.4 $m_{rad} \times m_{raaklyn} = -1 \qquad (radius \perp raaklyn)$

$\frac{5}{12} \times m_{rkl} = -1$

$m_{tan} = -\frac{12}{5}$

7.5 $y - y_Q = mQ_{rkl}$

$y - 5 = -\frac{12}{5}(x-12)$

$y = -\frac{12}{5}x + \frac{169}{5}$

7.6 $y = -\frac{12}{5}x + \frac{169}{5}$

vervang R, die punt op die lyn

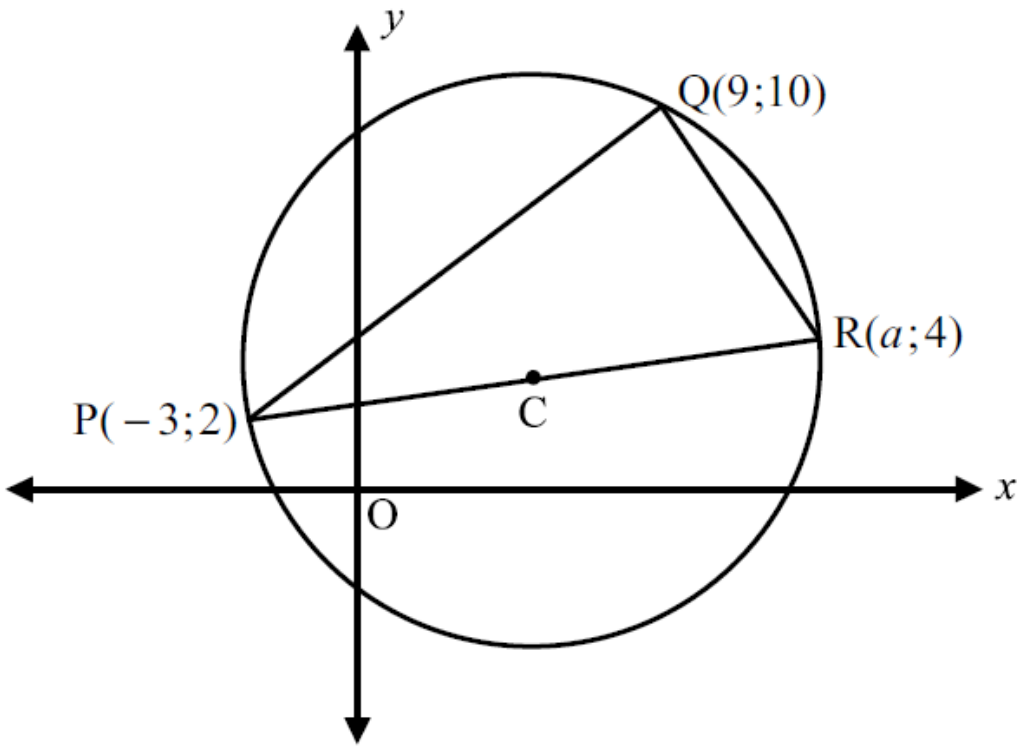
$-1 = -\frac{12}{5}t + \frac{169}{5}$

$\therefore t = \frac{29}{2} = 14.5$

7.7 $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 169$

UITGEWERKTE VOORBEELD 8

Die punte $P(-3\ ;\ 2)$, $Q(9\ ;\ 10)$ en $R(a\ ;\ 4)$ lê op die omtrek van die sirkel, soos aangetoon in die diagram hieronder. PR is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt C.



8.1.1 Toon aan dat $a = 13$.

8.1.2 Bepaal die vergelyking van die sirkel in die vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

8.2 Die vergelykings van twee sirkels met middelpunte A en B word hieronder gegee.

Sirkel A: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$

Sirkel B: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 16$

Sonder om vir x en y op te los, bepaal of die sirkels by twee punte sny, mekaar raak, of nie mekaar sny nie. Toon al jou berekeninge.

Oplossing:

8.1.1 $\hat{Q} = 90°$ (∠ in semi/halwe-sirkel)

$m_{\text{PQ}} \times m_{\text{QR}} = -1$

$\therefore \frac{10-4}{9-a} \times \frac{10-2}{9-(-3)}$

$\therefore \frac{6}{9-a} \times \frac{8}{12} = -1$

$\therefore \frac{6}{9-a} \times \frac{2}{3} = -1$

$\therefore \frac{12}{27-3a} = -1$

$\therefore 12 = -27 + 3a$

$\therefore 39 = 3a$

$\therefore a = 13$

8.1.2 Middelpunt: $C\left(\frac{-3+13}{2} \; ; \; \frac{2+4}{2}\right) = (5 \; ; \; 3)$

Radius: $r^2 = (5-(-3))^2 + (3-2)^2 = 65$

$\therefore r = \sqrt{65}$

Vergelyking van die sirkel:

$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 65$

8.2 $r_A = 3$ en $A(2 \; ; \; 3)$

$r_B = 4$ en $B(1 \; ; \; -1)$

Afstand tussen A en B:

$\text{AB}^2 = (1-2)^2 + (-1-3)^2 = 17$

$\text{AB} = \sqrt{17} = 4{,}1231\ldots$

$r_A + r_B = 7 > \sqrt{17}$

Die sirkels sny mekaar.

AKTIWITEITE

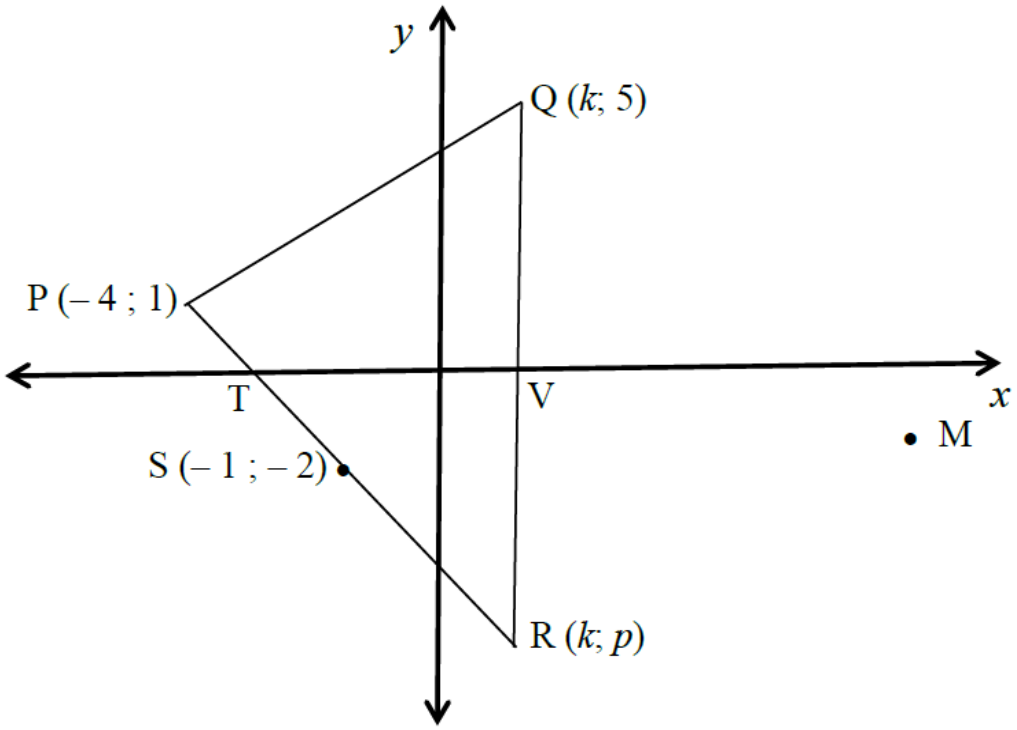
AFDELING 2: ANALITIESE MEETKUNDE

AKTIWITEIT 1

In die diagram hieronder, is P (– 4; 1), Q (*k*; 5) en R(*k*; p) die hoekpunte van Δ PQR.

S (– 1; – 2) is die midddelpunt van PR. T is die *x*-afsnit van PR en V is die *x*-afsnit van QR.

QR is loodreg op die *x*-as



1.1 Toon aan dat $k = 2$ en $p = -5$.

1.2 Bereken die lengte van PR.

1.3 Bepaal die gradiënt van PR.

1.4 Bepaal die vergelyking van PR, in die vorm $y = mx + c$.

1.5 Bepaal of die punt (– 11; 14) op die lyn wat in vraag 1.4 bepaal is, lê of nie.

1.6 Bepaal die vergelyking van die lyn wat deur die punt R gaan en loodreg op die lyn PR is.

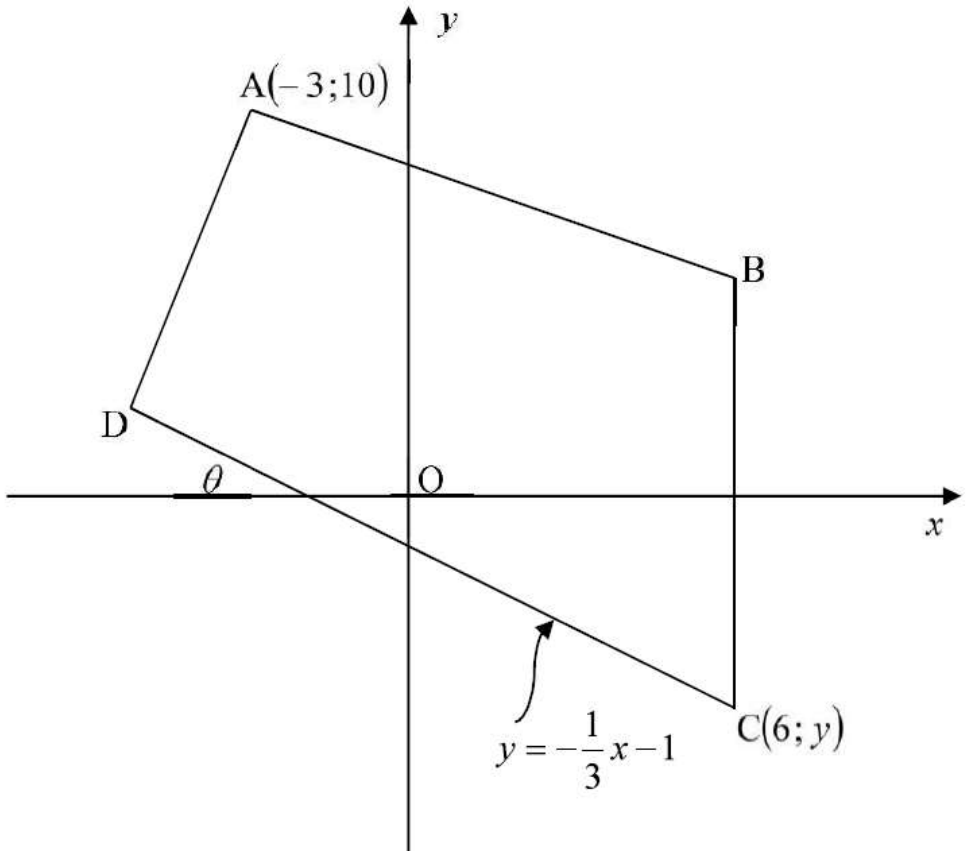
1.7 Bepaal die koördinate van M, as PQMR 'n parallelogram is.

1.8 Bereken die grootte van $P\hat{R}Q$

AKTIWITEIT 2

In die diagram hieronder, is punt A$(-3;10)$ en B in die eerste kwadrant hoekpunte van vierhoek ABCD.

Vergelyking van lyn DC is gegee as $y = -\frac{1}{3}x - 1$ en DC vorm 'n hoek θ met die x-as, soos aangedui.



2.1 Skryf die gradiënt van DC neer.

2.2 Bereken die grootte van θ.

2.3 Bepaal die vergelyking van die lyn AD, as $AD \perp DC$.

2.4 Bepaal die y −koördinaat van C.

2.5 Bepaal:

2.5.1 Die koördinate van D en bereken, vervolgens, die lengte van AD.

2.5.2 Die oppervlakte van $\Delta\, ACD$

2.6 Bewys of vierhoek ABCD 'n parallelogram is, as dit gegee word dat die koördinate van B, $(6;6)$ is. Toon alle nodige berekeninge.

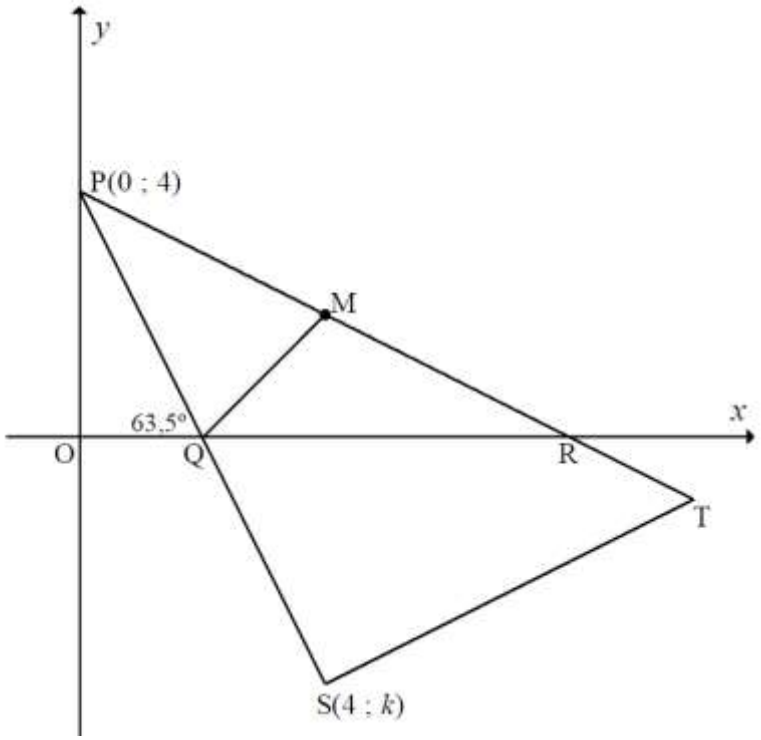
AKTIWITEIT 3

In die diagram hieronder, is driehoek PST, met hoekpunte $P(0;4)$, $S(4;k)$ en T, getoon.

Q en R is die *x*-afsnitte van PS en PT onderskeidelik. $OQ:OR = 1:4$.

M is die middelpunt van PR.

$O\widehat{Q}P = 63{,}5°$



3.1 Bepaal die gradiënt van PS, korrek tot **die naaste heelgetal**.

3.2 Skryf die vergelyking van PS neer.

3.3 Toon aan dat $k = 4$.

3.4 Bepaal die lengte van QR.

3.5 Bereken die koördinate van M.

3.6 Bewys dat QM nie die middelloodlyn van PR is nie.

3.7 Bereken die oppervlakte van vierhoek QSTM, as die koördinate van T, $(10, -1)$ is.

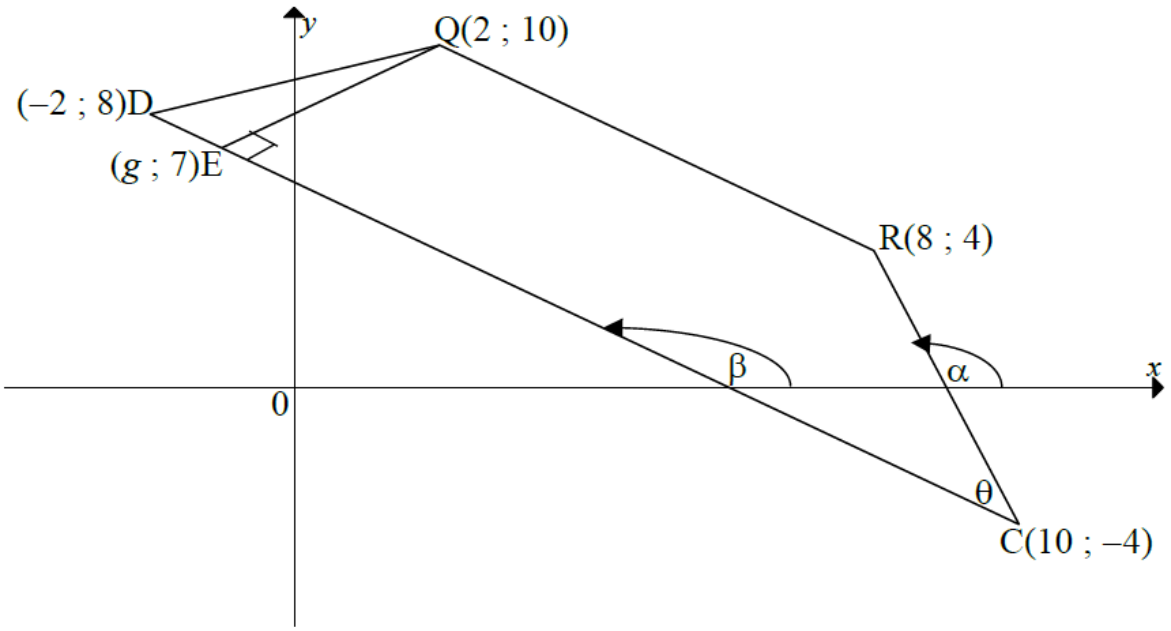
AKTIWITEIT 4

QRCD is 'n trapezium met hoekpunte, M(2 ; 10), R(8 ; 4), C(10 ; – 4) en D(– 2 ; 8).

Vergelyking van lyn CD word gegee deur $y = -x + 6$.

Die inklinasiehoeke van CD en RC is β en α onderskeidelik.

E$(g\ ;\ 7)$ is 'n punt op CD sodat QE⊥CD. $R\hat{C}D = \theta$



4.1 Toon aan dat $g = -1$.

4.2 Bepaal die lengte van CD.

4.3 Bepaal die vergelyking van RC, in die vorm $y = \ldots$.

4.4 Bereken die grootte van hoek θ.

4.5 Punt M, is die middelpunt van CD, sodat QRCM 'n parallelogram is.

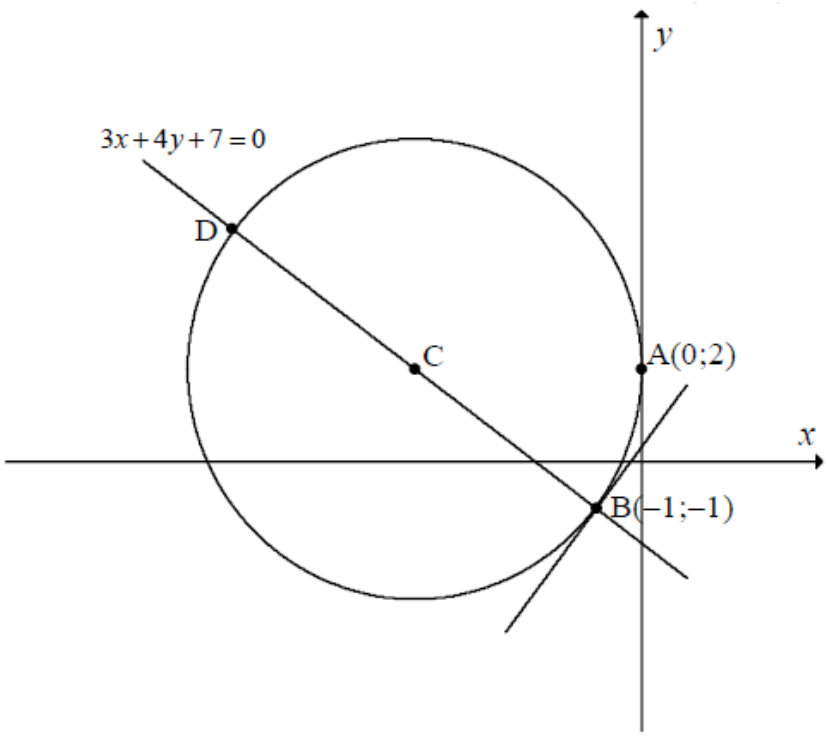
Bepaal die koördinate van M.

4.6 Oppervlakte van trapezium: $A = \frac{1}{2}(a + b)h$.

Bereken die oppervlakte van trapezium QRCD as dit gegee word dat QR = $6\sqrt{2}$

4.7 As $QD = \sqrt{20}$ en $QM = \sqrt{68}$, bereken die omtrek van Δ DMQ.

AKTIWITEIT 5



5.1 In die diagram hieronder , raak die sirkel met middelpunt C die y-as by $A(0;2)$.
'n Reguitlyn met vergelyking $3x + 4y + 7 = 0$ sny die sirkel by $B(-1;-1)$ en D

5.1.1 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by B.

5.1.2 Bepaal die vergelyking van die sirkel in die vorm $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

5.1.3 Bepaal die koördinate van die beeld van B, nadat die sirkel in die lyn $y = 2$ gereflekteer is.

5.2 'n Sirkel met vergelyking $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 54 = 0$, is op die Cartesiesevlak geteken.

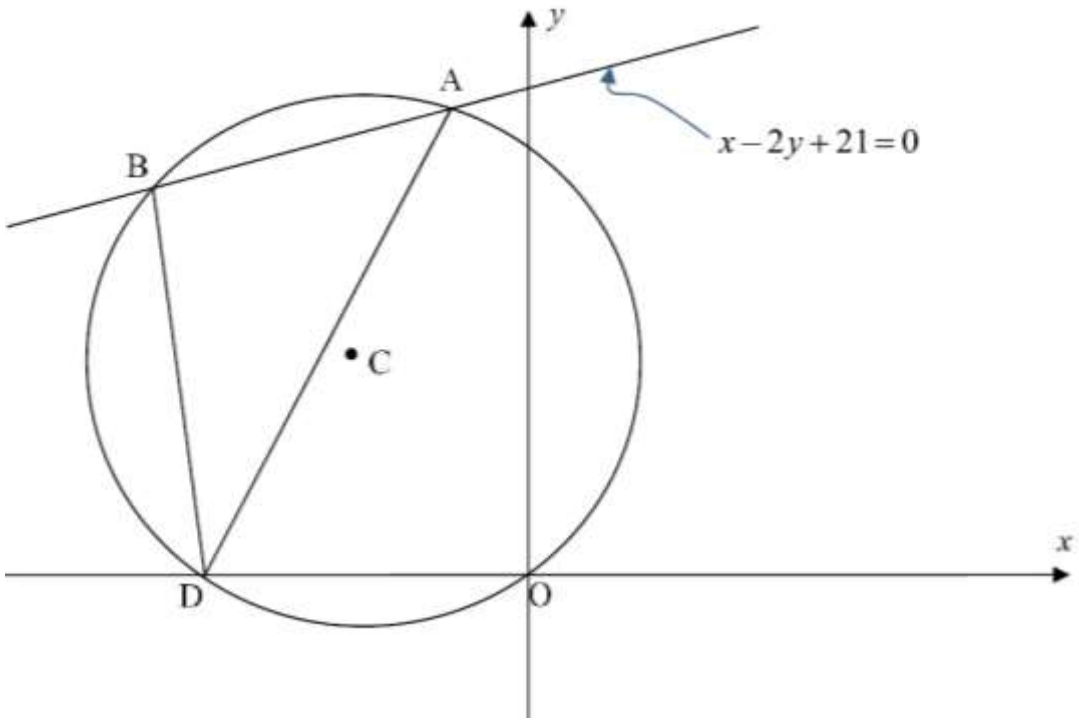
5.2.1 Bepaal die koördinate van die middelpunt van die sirkel en die lengte van die radius.

5.2.2 'n Ander sirkel met vergelyking $x^2 + y^2 = r^2$ is geteken op dieselfde Cartesiesevlak en raak die sirkel $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 54 = 0$ intern/inwendig.

Bereken die waarde van r. Gee jou antwoord korrek tot 2 desimale plekke.

AKTIWITEIT 6

In die diagram hieronder, lê A, B, D en die oorsprong O op die omtrek van die sirkel met middelpunt C. Die vergelyking van die sirkel is $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. Die vergelyking van AB is $x - 2y + 21 = 0$.



6.1 Bepaal die koördinate van die middelpunt C, en die radius van die sirkel.

6.2 Bepaal die koördinate van A en B.

6.3 Bepaal:

6.3.1 Die middelpunt van AD.

6.3.2 Of CB deur die middelpunt van lynstuk AD gaan.

6.4 'n Tweede sirkel met vergelyking $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$ is op dieselfde assestelsel geteken. 'n Student beweer dat die sirkels mekaar by een punt raak. Is die student korrek/reg? Toon berekeninge om jou antwoord te staaf.

AKTIWITEIT 7

7.1 Bepaal die middelpunt en die radius van die sirkel met vergelyking $x^2 + y^2 + 8x + 4y - 38 = 0$.

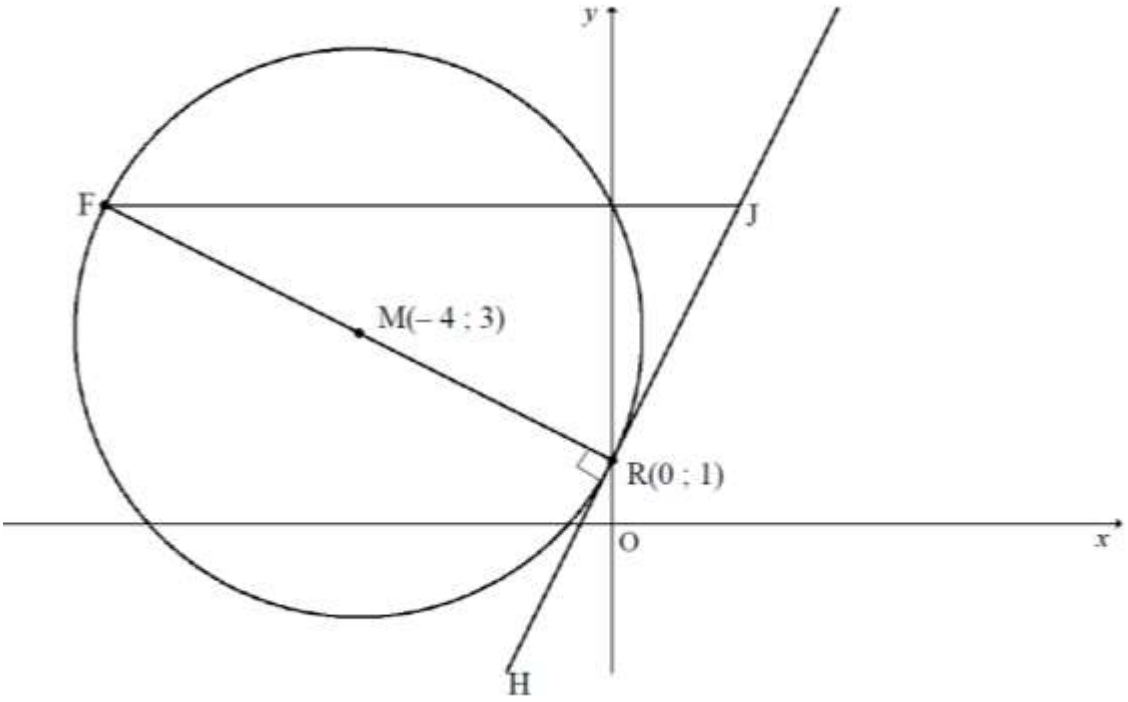
7.2 'n Tweede sirkel het die vergelyking $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = 26$. Bereken die afstand tussen die middelpunte van die twee sirkels.

7.3 Toon, vervolgens, aan dat die sirkels wat in 7.1 en 7.2 beskryf word mekaar sny.

7.4 Toon aan dat die sirkels op die lyn $y = -x + 4$ sny.

AKTIWITEIT 8

Hieronder geteken is ’n sirkel met middelpunt, M(– 4 ; 3).
R(0 ; 1) en F(*x ; y*) is tween punte op die sirkel sodat FR ’n middellyn van die sirkel is.
JRH is ’n raaklyn aan die sirkel by R. Die verhouding FJ : JR = 2,237 : 1



8.1 Bepaal die vergelyking van die sirkel met middelpunt M, in die vorm $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

8.2 Bepaal die vergelyking van raaklyn JRH aan die sirkel by R in die vorm $y =$ …

8.3 Lê punt P(5 ; 2) binne, buite of op die omtrek van die sirkel? Staaf jou antwoord.

8.4 FJ is ewewydig aan die x-as

8.4.1 Bepaal die koördinate van J.

8.4.2 Bereken die lengte van FJ.

8.4.3 Skryf, vervolgens, die lengte van JR neer.

8.4.4 As J gereflekteer word in die lyn $y = x$, en 2 eenhede opwaarts transleer word, bepaal die koördinate van J' na die transformasie.

8.5 As $g(x)=k$, vir watter waardes van k sal g die sirkel presies tweekeer sny?



BIBLIOGRAFIE

1	Independent Examination Board (IEB) Maart 2014 – 2017 Vraestel 2.
2	Independent Examination Board (IEB) November 2014 – 2017 Vraestel 1.
3	Department of Education (DOE) Februarie/Maart 2009 – 2013 Vraestel 1.
4	Department of Education (DOE) November 2008 – 2013 Vraestel 1
5	BISHOPS DIOCESAN COLLEGE GRAAD 9 VRAESTEL 2 – 2017
6	2021 Graad 12 WISKUNDE EKSAMEN RIGLYNE
7	WISKUNDE VRAESTELLE GRAAD 12 (2008 – 2017) NASIONAAL
8	MIND ACTION SERIES HANDBOEK GRAAD 12
9	**WWW.MATHISFUN.COM**
10	Junie eksamen, 2026 FS,MP,NW,KZN, NC
11	Februarie – Maart 2020 Vraestel 2